

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

10.1 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Al derivar una función cualquiera $y = f(x)$ se genera otra función $y' = g(x)$, como por ejemplo en el caso de que $y = x^2$, al derivarla se obtiene la nueva función $y' = 2x$ que se llama la primera derivada. De hecho, todo el trabajo realizado hasta este momento en el presente curso ha estado encaminado a obtener la primera derivada.

Pero la primera derivada se puede volver a derivar, generándose una nueva función llamada ahora la *segunda derivada*; y si ésta última se vuelve a derivar, se obtiene la *tercera derivada*, y así sucesivamente. Es decir, la segunda derivada resulta de derivar la primera derivada, que en simbología matemática puede escribirse como

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

Para abreviar la simbología anterior, la segunda derivada se escribe como

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

La segunda derivada es la derivada de la derivada, no la derivada *por* la derivada. Son cosas diferentes. Por ejemplo, si $y = x^3$, entonces la primera derivada es $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. En la siguiente tabla se muestra la diferencia entre lo que resulta de la derivada de la derivada y de la derivada por la derivada:

Derivada de la derivada:	$\frac{d}{dx} 3x^2 = 6x$
Derivada por derivada:	$(3x^2)(3x^2) = 9x^4$

Todo lo antes dicho es aplicable para la tercera derivada, la cuarta derivada, etc.

Ejemplo 1: Obtener la segunda derivada de la función $y = 5x^2 - 7x + 13$.

Solución: La primera derivada es $\frac{dy}{dx} = 10x - 7$

La segunda derivada se obtiene derivando la primera derivada, es decir

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (10x - 7)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 10$$

Ejemplo 2: Calcular la tercera derivada de la función $y = \text{sen } 6x$.

Solución: $\frac{dy}{dx} = 6 \cos 6x$ (Primera derivada)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -36 \text{sen } 6x$$
 (Segunda derivada)

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -216 \cos 6x$$
 (Tercera derivada)

Ejemplo 3: Investigar cuál es la segunda derivada de la función $y = e^{2x} \cos 6x$.

Solución: Para la primera derivada debe emplearse la fórmula (7) del producto uv , vista en la página 77:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{2x}}_u \underbrace{(-6 \text{sen } 6x)}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{\cos 6x}_v \underbrace{(2e^{2x})}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -6e^{2x} \text{sen } 6x + 2e^{2x} \cos 6x$$
 (Primera derivada)

Para calcular la segunda derivada nuevamente debe utilizarse la misma fórmula del producto uv para cada término:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \underbrace{-6e^{2x} [6 \cos 6x] + \text{sen } 6x [-12e^{2x}]}_{\text{derivada del 1}^\text{er producto}} + \underbrace{2e^{2x} [-6 \text{sen } 6x] + \cos 6x [4e^{2x}]}_{\text{derivada del 2}^\text{o producto}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -36e^{2x} \cos 6x - 12e^{2x} \text{sen } 6x - 12e^{2x} \text{sen } 6x + 4e^{2x} \cos 6x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -32e^{2x} \cos 6x - 24e^{2x} \text{sen } 6x$$

EJERCICIO 10.1

Calcular la segunda derivada de las siguientes funciones:

1) $y = 4x^6 + 11x^5 - 7x^3 - x + 9$

3) $y = 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1$

5) $y = \cos 8x$

7) $y = \ln x^2$

9) $y = \sqrt{3x + 13}$

2) $y = 7x - 8$

4) $y = (5x - 8)^7$

6) $y = \tan 2x$

8) $y = \frac{3}{x^2 - 5}$

10) $y = \sqrt[5]{x^2 - 1}$