

# 6 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

## ÍNDICE PARTICULAR

- 6.1) CONCEPTOS Y DEFINICIONES **110**  
6.2) DESPEJE DIRECTO **111**  
    *ejercicio 6.1* **115**  
6.3) ECUACIONES DE LA FORMA  $m \operatorname{sen} x = n \operatorname{cos} x$  **115**  
    *ejercicio 6.2* **118**

## 6

## ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

## 6.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

La palabra *ecuación* viene del latín, de *aequatus*, participio pasivo de *aequare*: “*igualar, volver igual*”. Una ecuación es una afirmación de igualdad entre dos expresiones matemáticas. Resolver la ecuación significa encontrar la o las condiciones requeridas o necesarias para que se cumpla la igualdad propuesta.

Así, cuando se establece que  $3x^2 + 5x = 0$  es igual a cero, en ese momento se ha creado una ecuación, pues hay una afirmación de igualdad entre dos expresiones, o sea  $3x^2 + 5x = 0$  condicionada a ciertos valores de  $x$ . Otra cosa distinta es investigar qué se requiere para que realmente  $3x^2 + 5x$  sea igual a cero; cuando se hace esa investigación se llega a que se requiere que la equis sea  $x = 0$ , o bien  $x = -\frac{5}{3}$ . Eso es resolver la ecuación anterior.

Una ecuación es una especie de «adivinanza numérica», o sea que se hace un planteamiento cuya respuesta debe ser un número. Por ejemplo: *¿Qué número elevado al cuadrado es igual al doble de ese número más veinticuatro?* Es una adivinanza cuya respuesta es el número 6. La diferencia entre cualquier adivinanza con las *adivinanzas numéricas*, llamadas ecuaciones, es que para responder las primeras hay que atinarle a la respuesta, mientras que en las numéricas existen procedimientos que conducen certera e infaliblemente a la solución.

Así, en el caso anterior, se puede plantear que

$$\begin{aligned}x^2 &= 2x + 24 \\x^2 - 2x - 24 &= 0 \\(x - 6)(x + 4) &= 0\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Entonces, una ecuación trigonométrica también va a ser una especie de «adivinanza numérica», solamente que relacionada con una función trigonométrica. Por ejemplo: *El seno de un ángulo más el coseno de ese mismo ángulo es igual a 1.328926, ¿Cuál es ese ángulo?* El alumno puede comprobar con su calculadora que la respuesta es  $25^\circ$ ; pero evidentemente que esa respuesta no es posible encontrarla al tanteo. Debe existir un procedimiento matemático que lleve a la solución, el cual es el planteamiento de una ecuación trigonométrica:

$$\text{sen } x + \text{cos } x = 1.328926$$

Resolver ecuaciones como la anterior es el objetivo de este capítulo. Para su estudio conviene clasificar las ecuaciones trigonométricas y mencionar el método de solución que les corresponda. En cualquiera de los casos se llegará al final del procedimiento a una función trigonométrica inversa la cual tiene dos soluciones según se vio en el capítulo 3. Esto último es fundamental para llegar a las respuestas correctas.

## 6.2 DESPEJE DIRECTO

Las ecuaciones trigonométricas más sencillas son las que se resuelven simplemente despejando la función trigonométrica y luego aplicando la función inversa para despejar el argumento. **El argumento es el ángulo**, que no necesariamente es  $x$ . Esto es importantísimo tenerlo presente para despejar correctamente.

Es fundamental recordar también que **todas las funciones trigonométricas inversas tienen dos soluciones**, según lo visto en las páginas 79 a 86 del capítulo 4.

**Ejemplo 1:**  $\text{cos } 2x = 0.642787609$

**Solución:** En este caso, la función trigonométrica ya está despejada. El argumento, o sea el ángulo, es  $2x$ . Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{cos } 2x &= 0.642787609 \\ 2x &= \text{arc cos } 0.642787609 \end{aligned}$$

Como el coseno es positivo en el primero y cuarto cuadrantes, tiene dos soluciones (ver capítulo 4) que son:

Primer cuadrante:	Cuarto cuadrante:
$2x_1 = 50$	$2x_2 = 360 - 50$
$x_1 = \frac{50}{2}$	$2x_2 = 310$
$x_1 = 25$	$x_2 = \frac{310}{2}$
	$x_2 = 155$

Las soluciones de la ecuación son

$x_1 = 25$
$x_2 = 155$

**¡Cuidado!** Al afirmar que existen dos soluciones en la ecuación trigonométrica, se refiere a que el *arco coseno* de 0.642787609 es 50 grados y también 310 grados los cuales son iguales al argumento  $2x$ . No debe confundirse entonces entre que esos valores sean iguales a  $x$  a que sean iguales al argumento, en este caso a  $2x$ . La realidad es que esos valores deben ser iguales siempre al argumento.

**Ejemplo 2:**  $5 + \tan 6x = 3.267949192$

**Solución:** El argumento, o sea **el ángulo es  $6x$**  en este caso. Despejando primero la función trigonométrica:

$$\begin{aligned} \tan 6x &= 3.267949192 - 5 \\ \tan 6x &= -1.732050808 \end{aligned}$$

Aplicando la función inversa para despejar el argumento  $6x$  (no  $x$ ), se obtiene:

$$6x = \text{arc tan} (-1.732050808)$$

$6x$  es el ángulo, que tiene dos soluciones, las cuales están en el segundo y cuarto cuadrantes ya que en dichos cuadrantes la tangente es negativa. Conforme a lo visto en la página 81, se saca primero la tangente inversa al valor absoluto para obtener que  $\text{arc tan } 1.732050808 = 60$ . Entonces las dos soluciones son:

<b>Segundo cuadrante:</b>
$6x_1 = 180 - 60$
$6x_1 = 120$
$x_1 = \frac{120}{6}$
$x_1 = 20$

<b>Cuarto cuadrante:</b>
$6x_2 = 360 - 60$
$6x_2 = 300$
$x_2 = \frac{300}{6}$
$x_2 = 50$

**Ejemplo 3:**  $\text{sen}(2x + 8) = -0.93969262$

**Solución:** En este caso la función trigonométrica seno ya está despejada. El ángulo, o sea el argumento es  $(2x + 8)$ . Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{sen}(2x + 8) &= -0.93969262 \\ (2x + 8) &= \text{arc sen}(-0.93969262) \end{aligned}$$

$(2x + 8)$  es el ángulo, el cual tiene dos soluciones, las que están en el tercero y cuarto cuadrantes, ya que allí el seno es negativo. Conforme a lo visto en la página 81, se saca primero *arco seno* al valor absoluto para obtener que  $\text{arc sen } 0.93969262 = 70$ . Entonces, tomando en cuenta que el valor anterior (70) es igual al argumento, las dos soluciones son:

<b>Tercer cuadrante:</b>
$2x_1 + 8 = 180 + 70$
$2x_1 + 8 = 250$
$2x_1 = 242$
$x_1 = \frac{242}{2}$
$x_1 = 121$

<b>Cuarto cuadrante:</b>
$2x_2 + 8 = 360 - 70$
$2x_2 + 8 = 290$
$2x_2 = 282$
$x_2 = \frac{282}{2}$
$x_2 = 141$

Las soluciones de la ecuación son

$$\begin{aligned} x_1 &= 121 \\ x_2 &= 141 \end{aligned}$$

**Ejemplo 4:**  $\cos(x^2 + 10) = 0.275637355$

**Solución:** En este caso el ángulo, o sea el argumento es  $(x^2 + 10)$ . Entonces aplicando la función inversa para despejar el argumento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos(x^2 + 10) &= 0.275637355 \\ x^2 + 10 &= \text{arc cos } 0.275637355 \end{aligned}$$

como el *arco coseno* de 0.275637355 es igual a 74, las dos soluciones, las cuales están en el primero y cuarto cuadrantes, ya que allí el coseno es positivo, son:

<b>Primer cuadrante:</b>
$x^2 + 10 = 74$
$x^2 = 74 - 10$
$x^2 = 64$
$x = \pm \sqrt{64}$
$x_1 = 8$
$x_2 = -8$

<b>Cuarto cuadrante:</b>
$x^2 + 10 = 360 - 74$
$x^2 + 10 = 286$
$x^2 = 286 - 10$
$x^2 = 276$
$x_3 = +\sqrt{276}$
$x_4 = -\sqrt{276}$

Las soluciones de la ecuación son

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm 8 \\ x_2 &= \pm \sqrt{276} \end{aligned}$$

### EJERCICIO 6.1

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas.

- |  |   |
|--|---|
| 1) $\text{sen } 3x = 0.707106781$              | 2) $\text{cos } 4x = 0.882947592$               |
| 3) $\text{tan } 8x = 5.671281820$              | 4) $\text{sen } 10x = 0.766044444$              |
| 5) $\text{cos } 2x = -0.913545457$             | 6) $\text{tan } 7x = 1.482560969$               |
| 7) $\text{sen } (3x + 2) = -0.529919264$       | 8) $\text{cos } (x - 7) = -0.788010753$         |
| 9) $\text{tan } (5x + 7) = -1.962610506$       | 10) $\text{sen } (9 - 2x) = -0.087155742$       |
| 11) $\text{cos } 5x^2 = -0.422618261$          | 12) $\text{tan } 3x^2 = -3.077683537$           |
| 13) $\text{sen } (x^2 + 2) = 0.992546151$      | 14) $\text{cos } (x^2 - 50) = 0.069756473$      |
| 15) $\text{tan } (x + 70) = -1.962610506$      | 16) $\text{sen } (49 - 2x) = -0.087155742$      |
| 17) $\text{cos } 2x^2 = -0.422618261$          | 18) $\text{tan } (75 - 3x^2) = -3.077683537$    |
| 19) $\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.5$ | 20) $\text{cos}\left(\frac{4}{3x}\right) = 0.5$ |

### 6.3 ECUACIONES DE LA FORMA: $m \text{ sen } x = n \text{ cos } x$

Las siguientes ecuaciones trigonométricas más sencillas de resolver son las que tienen la forma  $m \text{ sen } x = n \text{ cos } x$ , donde  $m$  y  $n$  son números conocidos. Basta transformar la ecuación a la forma

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{n}{m}$$

dividiendo la ecuación original entre  $m \text{ cos } x$  (lo que indebidamente se dice que “pasa a dividir el *coseno* y  $m$  al otro lado”) y sustituir el cociente *seno entre coseno por la tangente*, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 90. Luego simplemente se despeja la tangente aplicándole la función inversa y teniendo cuidado de localizar los dos valores que le corresponden por el signo de la función, conforme a lo visto en el capítulo 3.

**Ejemplo 5:**  $4 \text{ sen } x = 3 \text{ cos } x$

**Solución:** En este caso,  $m = 4$  y  $n = 3$ . La ecuación se puede escribir como:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{3}{4}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 90, y como

$$\frac{3}{4} = 0.75, \text{ se llega a que}$$

$$\tan x = 0.75$$

aplicándole la función inversa:

$$x = \text{arc tan } 0.75 = 36.87$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva:

<b>Primer cuadrante</b>
$x_1 = 36.87$

<b>Tercer cuadrante</b>
$x_2 = 180 + 36.87$
$x_2 = 216.87$

Las soluciones de la ecuación son:

$x_1 = 36.87$
$x_2 = 216.87$

**Ejemplo 6:**  $5 \text{ sen } x + 11 \text{ cos } x = 0$

**Solución:** Restando  $11 \text{ cos } x$  en ambos lados (lo que indebidamente se dice que el  $11 \text{ cos } x$  “pasa al otro lado a restar”), la ecuación queda en la forma  $m \text{ sen } x = n \text{ cos } x$ . Haciéndolo:

$$5 \text{ sen } x = - 11 \text{ cos } x$$

En este caso,  $m = 5$  y  $n = - 11$ . Dividiendo toda la igualdad anterior entre  $5 \text{ cos } x$  (lo que indebidamente se dice que el 5 y el  $\text{cos } x$  pasan al otro lado a dividir), se obtiene:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = - \frac{11}{5}$$

sustituyendo por la tangente, fórmula (7) de la página 90, y como  $\frac{11}{5} = 2.2$ , se llega a que

$$\tan x = - 2.2$$

aplicándole la función inversa:

$$x = \text{arc tan} (- 2.2)$$

la cual tiene dos soluciones, una en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que allí la tangente es negativa. Recordando que primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de (- 2.2), lo que da  $\text{arc tan } 2.2 = 65.556$ , se tiene que:

<b>Segundo cuadrante</b>
$x_1 = 180 - 65.556$
$x_1 = 114.443$

<b>Cuarto cuadrante</b>
$x_2 = 360 - 65.556$
$x_2 = 294.443$

Las soluciones de la ecuación son

$x_1 = 114.443$
$x_2 = 294.443$

**Ejemplo 7:**  $10 \text{ sen } 4x - 5 \text{ cos } 4x = 0$

**Solución:** Sumando  $5 \text{ cos } 4x$  en ambos lados (lo que incorrectamente se dice que  $- 5 \text{ cos } 4x$  pasa al otro lado a sumar), la ecuación queda en la forma  $m \text{ sen } x = n \text{ cos } x$ . Haciéndolo:

$$10 \text{ sen } 4x = 5 \text{ cos } 4x$$

En este caso,  $m = 10$  y  $n = 5$ . Dividiendo toda la igualdad anterior entre  $10 \text{ cos } 4x$  (lo que erróneamente se dice que pasan a dividir), se obtiene:

$$\frac{\text{sen } 4x}{\text{cos } 4x} = \frac{5}{10}$$

sustituyendo por la tangente, conforme a la fórmula (7) de los cocientes de la página 90, y como

$$\frac{5}{10} = 0.5, \text{ se llega a que}$$

$$\tan 4x = 0.5$$

aplicándole la función inversa:

$$4x = \text{arc tan } 0.5$$

la cual tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante y la otra en el tercero, ya que allí la tangente es positiva. Recordando que primero se le saca *arco tangente* al valor absoluto de 0.5, lo que da  $\text{arc tan } 0.5 = 26.565$ , se tiene que:

Primer cuadrante
$4x_1 = 26.565$
$x_1 = \frac{26.565}{4}$
$x_1 = 6.641$

Tercer cuadrante
$4x_2 = 180 + 26.565$
$4x_2 = 206.565$
$x_2 = \frac{206.565}{4}$
$x_2 = 51.641$

Las soluciones de la ecuación son

$x_1 = 6.641$
$x_2 = 51.641$

### EJERCICIO 6.2

Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

- |  |  |
|--|--|
| 1) $2 \text{ sen } x = \cos x$                   | 2) $5 \cos x = 6 \text{ sen } x$                 |
| 3) $\text{sen } 9x - \cos 9x = 0$                | 4) $12 \text{ sen } 10x = 4 \cos 10x$            |
| 5) $\cos 2x - 7 \text{ sen } 2x = 0$             | 6) $8 \text{ sen } (2x - 2) = 4 \cos (2x - 2)$   |
| 7) $\text{sen } (3x + 2) = 5 \cos (3x + 2)$      | 8) $\cos (x - 7) - 3 \text{ sen } (x - 7) = 0$   |
| 9) $20 \text{ sen } (5x + 7) = -5 \cos (5x + 7)$ | 10) $12 \text{ sen } (9 - 2x) = 6 \cos (9 - 2x)$ |