CAPÍTULO 8

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

8.1 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Una función exponencial es aquella en la que la variable está en el exponente. Ejemplos de funciones exponenciales son

$$y = 2^x$$
$$y = 4^{5x}$$
$$y = 8^{2x+1}$$
$$y = 10^{x-3}$$

Antes de entrar de lleno en el estudio de las funciones logarítmicas conviene repasar el concepto de logaritmo, ya que es frecuente que los estudiantes lleguen a este momento sin recordar qué son los logaritmos o, en el caso más extremo, sin haberlos estudiado nunca durante su carrera estudiantil.

En Matemáticas toda operación o todo proceso tiene su inverso, su camino de retorno al punto inicial. Por ejemplo, si a 4 se le suma 3 se llega al 7; el retorno del 7 al 4 es restar 3. El retorno de la multiplicación es la división, etc. De manera que si se tienen las siguientes potencias:

1) $2^3 = 8$
2) $3^2 = 9$

3) $5^4 = 625$
4) $10^2 = 100$
5) $10^3 = 1000$ etc.

si se pregunta ¿Cuál es el inverso (el camino de retorno) de cada una de ellas? por inercia el estudiante responde conforme a la siguiente tabla:

Potencia	Inverso
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$
$5^4 = 625$	$\sqrt[4]{625} = 5$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$

lo cual es cierto. Sin embargo, obsérvese que en cada potencia (primera columna) se tienen dos cantidades, la base y el exponente, y en la tabla anterior el retorno se hizo hacia la base. ¿No podría haber sido el retorno hacia el exponente? Dicho de otra forma: ¿Cómo hacer para regresar al exponente, en vez de a la base? Allí es donde aparece el concepto de logaritmo.

Cuando se tiene la potenciación

$$a^k = c$$

donde a, k y c son cualquier número (son tres cantidades las que intervienen: la base, el exponente y el resultado), a partir del resultado c existen dos posibilidades de regreso, uno hacia la base y otro hacia el exponente. Para regresar a la base se emplea la raíz *k-ésima*[1] de c; para regresar al exponente se emplea *el logaritmo base a de c*. En ambos casos la "operación raíz" o la "operación logaritmo" se le aplica al resultado c de la potenciación; además, se debe hacer intervenir a la tercera cantidad, en el primer caso para señalar el índice del radical, en el segundo caso para señalar la base.

Volviendo al ejemplo de la tabla anterior, existen dos caminos de retorno, uno hacia la base y otro hacia el exponente. Cuando es a la base, se emplea la raíz *k-ésima*, cuando es al exponente se emplea *el logaritmo base a*:

Potencia	Regreso a la base	Regreso al exponente
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$log_2 8 = 3$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$log_3 9 = 2$
$5^4 = 625$	$\sqrt[4]{625} = 5$	$log_5 625 = 4$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$log_{10} 100 = 2$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$log_{10} 1000 = 3$

De manera que la definición de logaritmo es:

[1] En el idioma Español, para denotar los números ordinales se emplea la terminación *ésimo*. Así, el ordinal de 20 es vigésimo; el de 70 es septuagésimo; el de 200 es bicentésimo; el de 700 es septingentésimo, el de 834 es octingentésimo trigésimo cuarto, etc. Cuando se habla en términos genéricos suele emplearse la letra k o la letra n para referirse a cualquier número. De tal manera que el ordinal de un número genérico k es *k-ésimo*; el ordinal de un número genérico n es *n-ésimo*. Es una grave incorrección decir veinteavo en vez de vigésimo, o setentavo en vez de septuagésimo.

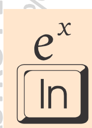
El logaritmo de un número n es el exponente al que debe elevarse la base para obtener dicho número n.

Como los logaritmos pueden ser base de cualquier número, habría un número infinito de diferentes logaritmos, por lo que en algún momento los matemáticos acordaron emplear solamente dos tipos de logaritmos:

a) Los logaritmos base diez (por tratarse de un sistema decimal), llamados *logaritmos vulgares* o *logaritmos decimales*, representados simplemente por el símbolo *log* sin especificar la base, que se sobreentiende que es 10.

b) Los *logaritmos naturales*, representados por el símbolo *ln* y cuya base es el número irracional 2.718281828,. De manera semejante a como con π se representa el número de veces que el diámetro cabe en su propia circunferencia (3.1416), la base de los logaritmos naturales se simboliza con la letra e, o sea que $e = 2.718281828$.

Para obtener el valor de e con la calculadora debe oprimirse la tecla e^x que en casi todos los modelos se localiza como segunda función del logaritmo natural, y después teclear el número 1. Con eso realmente se está ingresando e^1 que es e.



Este número sale del límite

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

del cual, por no ser tema de este curso, no se va a detallar más.

8.2 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Los logaritmos, no importa cuál sea su base, todos tienen las siguientes tres propiedades:

1ª: $\log A + \log B = \log AB$

2ª: $\log A - \log B = \log \dfrac{A}{B}$

3ª: $A \log B = \log B^A$

De éstas, la tercera será muy útil para resolver algunas derivadas de logaritmos, como se expondrá en algunos de los ejemplos venideros.

8.3 FÓRMULAS

(15) $$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{\dfrac{du}{dx}}{u}$$

(16) $$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

La derivada del logaritmo natural de u, (u es el argumento) es una fracción: en el numerador la derivada del argumento; en el denominador el argumento u tal cual.

Ejemplo 1: Hallar la derivada de $y = \ln 9x$

Solución: En este caso, el argumento es $9x$, es decir $u = 9x$. Aplicando la fórmula (15):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{\frac{d}{dx}9x}^{\frac{du}{dx}}}{\underbrace{9x}_{u}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}$$

Ejemplo 2: Derivar $y = ln\,(7x + 12)$

Solución: En este ejemplo, el argumento es $7x + 12$, es decir que $u = 7x + 12$. Así que aplicando la fórmula (15):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(7x+12)}{7x+12} \quad \leftarrow \left\{ \frac{du}{dx} \right. \quad \leftarrow \{u$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{7}{7x+12}}$$

Ejemplo 3: Obtener la derivada de $y = ln\,(3x^2 - 3x + 7)$

Solución: El argumento es $3x^2 - 3x + 7$, esto es que $u = 3x^2 - 3x + 7$. Utilizando la fórmula (15):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(3x^2 - 3x + 7\right)}{3x^2 - 3x + 7}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 3}{3x^2 - 3x + 7}}$$

Ejemplo 4: Calcular la derivada de $y = ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución: El argumento del logaritmo es $\frac{1}{x}$, por lo que empleando la fórmula (15):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$\left\{ \frac{du}{dx} \right.$

$\{ u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}x^{-1}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1\,x^{-2}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}}$$

Por la ley de la herradura:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}}$$

Otra forma:

Como $y = ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ es lo mismo que $y = ln\ x^{-1}$, se puede aplicar la tercera propiedad de los logaritmos, página 111, que leída de derecha a izquierda se tiene que $y = (-1)\ ln\ x$, es decir que la función a derivar es $y = -\ ln\ x$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{d}{dx}x}{x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}}$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

Ejemplo 5: Hallar la derivada de $y = ln\sqrt{3x}$

Solución: El argumento es $\sqrt{3x}$, de modo que empleando la fórmula (15):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{\frac{d}{dx}\sqrt{3x}}^{\frac{du}{dx}}}{\underbrace{\sqrt{3x}}_{u}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(3x)^{1/2}}{\sqrt{3x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(3x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(3x)}{\sqrt{3x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(3x)^{-1/2}(3)}{\sqrt{3x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x}}}{\sqrt{3x}}$$

Aplicando la ley de la herradura:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{3x}\sqrt{3x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{3}}{2(\cancel{3}x)}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro
LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro
LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}}$$

Otra forma:

Como $y = ln\sqrt{3x}$ es lo mismo que $y = ln\,(3x)^{1/2}$, aplicando la 3ª propiedad de los logaritmos, página 111, leída de derecha a izquierda se tiene que $y = \frac{1}{2} ln\ 3x$, por lo que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{d}{dx}3x}{3x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}x}\right]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x}}$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

Ejemplo 6: Calcular la derivada de $y = ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}\right)$

Solución: El argumento es $\frac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}$. Empleando la fórmula (15):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}}$$

$$\left\{\frac{du}{dx}\right.$$

$$\{u$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{d}{dx}\left(5x^2\right)^{-1/3}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{1}{3}\left(5x^2\right)^{-\frac{1}{3}-1}\dfrac{d}{dx}\left(5x^2\right)}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{1}{3}\left(5x^2\right)^{-4/3}\left(10x\right)}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{10x}{3\left(5x^2\right)^{4/3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}}$$

Por la ley de la herradura:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x\sqrt[3]{5x^2}}{3\left(5x^2\right)^{4/3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x\left(5x^2\right)^{1/3}}{3\left(5x^2\right)^{4/3}}$$

Recordando que para simplificar cuando se tiene la misma base se restan los exponentes:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x}{3}\left(5x^2\right)^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x}{3}\left(5x^2\right)^{-\frac{3}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x}{3\left(5x^2\right)^{3/3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x}{3\left(5x^2\right)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x}{15x^2}$$

Simplificando nuevamente:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{3x}}$$

Ejemplo 7: Derivar $y=e^{2x}$

Solución: Empleando la fórmula (16), donde $u=2x$:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{2x}}_{e^u} \underbrace{\frac{d}{dx} 2x}_{\frac{d}{dx} u}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}}$$

Ejemplo 8: Obtener la derivada de $y = e^{5x - 3}$

Solución: Aplicando la fórmula (16), donde $u = 5x - 3$:

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x-3} \frac{d}{dx}(5x - 3)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 5e^{5x-3}}$$

Ejemplo 9: Hallar la derivada de $y = e^{\sqrt{x}}$

Solución: Por la fórmula (16), en donde $u = \sqrt{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}}\,\frac{d}{dx}x^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}$$

Ejemplo 10: Hallar la derivada de $y = x^2 e^{6x}$

Solución: Como se trata de un producto, debe emplearse la fórmula (7) de la página 77:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

en donde $u = x^2$ y $v = e^{6x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\frac{d}{dx}e^{6x}}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{e^{6x}}_{v}\,\underbrace{\frac{d}{dx}x^2}_{\frac{du}{dx}}$$

Para la primera derivada pendiente se emplea la fórmula (16)

$$\frac{dy}{dx} = x^2\left(\underbrace{e^{6x}}_{e^u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}6x}_{\frac{du}{dx}}\right) + e^{6x}(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2\left[e^{6x}(6)\right] + 2xe^{6x}$$

Ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 6x^2e^{6x} + 2xe^{6x}}$$

Ejemplo 11: Calcular la derivada de $y = e^{2x}\ ln\ x^2$

Solución: Como se trata de un producto, debe emplearse la fórmula de uv:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{e^{2x}}_{u}\ \underbrace{\frac{d}{dx}ln\ x^2}_{\frac{dv}{dx}} + \underbrace{ln\ x^2}_{v}\ \underbrace{\frac{d}{dx}e^{2x}}_{\frac{du}{dx}}$$

Para la primera derivada pendiente se utiliza la fórmula (15) del logaritmo natural y para la segunda derivada pendiente la fórmula (16) de e^u:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\left[\frac{\frac{d}{dx}x^2}{x^2}\right] + ln\,x^2\left[e^{2x}\frac{d}{dx}2x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}\left[\frac{2x}{x^2}\right] + ln\,x^2\left[2e^{2x}\right]$$

Finalmente, ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x}}{x} + 2e^{2x}\,ln\,x^2}$$

Ejemplo 12: Derivar $y = sen\,e^{3x}$

Solución: La función es de la forma $sen\,u$; donde el argumento es e^{3x}. Por lo tanto, empleando la fórmula (9) de la página 92 se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}sen\,e^{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = cos\,e^{3x}\frac{d}{dx}e^{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = cos\,e^{3x}\left[e^{3x}\frac{d}{dx}3x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = cos\,e^{3x}\left[e^{3x}(3)\right]$$

Finalmente, ordenando conforme a las reglas de escritura matemática:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 3e^{3x} \cos e^{3x}}$$

Ejemplo 13: Hallar la derivada de $y = \ln \sec x^2$

Solución: La función tiene la forma de $\ln u$, donde el argumento es $\sec x^2$, por lo tanto debe utilizarse la fórmula (15) de la página 111:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln \sec x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx} \sec x^2}{\sec x^2}$$

La derivada pendiente tiene la forma de $\sec u$, donde el argumento de la secante es x^2, por lo que ahora debe emplearse la fórmula (13) de la página 92:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan x^2 \sec x^2 \frac{d}{dx} x^2}{\sec x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan x^2 \sec x^2 \left[2x\right]}{\sec x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \tan x^2 \cancel{\sec x^2}}{\cancel{\sec x^2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2x \tan x^2}$$

Ejemplos avanzados:

Ejemplo 14: Obtener la derivada de $y = ln^4 (6x-5)^3$

Solución: Como $ln^4 (6x-5)^3 = \left[ln (6x-5)^3 \right]^4$, la función tiene la forma de u^n, de manera que empleando la fórmula (6) de la página 69:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{4}_{n} \underbrace{\left[ln (6x-5)^3 \right]}_{u}^{\overbrace{4-1}^{n-1}} \underbrace{\frac{d}{dx} ln (6x-5)^3}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 ln^3 (6x-5)^3 \left[\frac{\frac{d}{dx}(6x-5)^3}{(6x-5)^3} \right]$$

La derivada pendiente es de la forma u^n, por lo que debe emplearse nuevamente la fórmula (6) de la página 69:

$$\frac{dy}{dx} = 4 ln^3 (6x-5)^3 \left[\frac{3(6x-5)^{3-1} \frac{d}{dx}(6x-5)}{(6x-5)^3} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 ln^3 (6x-5)^3 \left[\frac{3(6x-5)^2 (6)}{(6x-5)^3} \right]$$

Finalmente simplificando, multiplicando $4\times3\times6$ y ordenando conforme a las reglas de escritura matemática, se llega a

$$\frac{dy}{dx}=4\,ln^3\left(6x-5\right)^3\left[\frac{18\cancel{\left(6x-5\right)^2}}{\cancel{\left(6x-5\right)^3}}\right]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{72}{6x-5}\,ln^3\left(6x-5\right)^3}$$

Ejemplo 15: Derivar $y=ln\left(x\,sen\,5x\right)$

Solución: El argumento del logaritmo natural es $x\,sen\,5x$, por lo tanto $u=x\,sen\,5x$. Utilizando la fórmula del logaritmo natural:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\overbrace{\frac{d}{dx}x\,senx\,5x}^{\frac{du}{dx}}}{\underbrace{x\,sen\,5x}_{u}}$$

La derivada pendiente $x\,sen\,5x$ es un producto, o sea de la forma uv, de manera que aplicando la fórmula del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\frac{d}{dx}\,sen\,5x}^{\frac{dv}{dx}}+\overbrace{sen\,5x}^{v}\,\overbrace{\frac{d}{dx}x}^{\frac{du}{dx}}}{x\,sen\,5x}$$

Ahora, la primera derivada pendiente es de la forma *sen u:*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\left[\cos 5x\,\frac{d}{dx}5x\right]+\ sen\ 5x\left[1\right]}{x\ sen\ 5x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{5x\cos 5x+sen\ 5x}{x\ sen\ 5x}}$$

Ejemplo 16: Hallar la derivada de $y=\dfrac{1}{ln\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

Solución: La función a derivar se puede escribir como $y=\left[ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^{-1}$, que toma la forma de u^n, donde $u=ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ y $n=-1$. Utilizando entonces dicha fórmula se llega a que:

$$\frac{dy}{dx}=\underbrace{-1}_{n}\ \underbrace{\left[ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]}_{u}^{\overbrace{-1-1}^{n-1}}\ \underbrace{\frac{d}{dx}ln\left(\frac{1}{x}\right)}_{\frac{du}{dx}}$$

La derivada pendiente es de la forma $ln\ u$, con $u=\dfrac{1}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = -1\left[ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-2} \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \begin{matrix} \longleftarrow \left\{ \frac{du}{dx} \right. \\ \longleftarrow \{u \end{matrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1\left[ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-2} \frac{\frac{d}{dx}\, x^{-1}}{x^{-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1\left[ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-2} \frac{-1\, x^{-2}}{x^{-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(-1)\frac{1}{ln^2\left(\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x}{x^2}\right]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\, ln^2 \frac{1}{x}}}$$

otra forma:

Por las propiedades de los logaritmos, la función original se puede escribir como

$$y = \frac{1}{ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{ln\, x^{-1}} = \left(ln\, x^{-1}\right)^{-1}$$

$y = \left(-\, ln\, x\right)^{-1}$ (El exponente del argumento pasa como coeficiente del logaritmo).

La cual tiene la forma de u^n, con $u = -\ln x$ y $n = -1$.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{-1}_{n}\,\underbrace{\left(-\ln x\right)}_{u}^{\underbrace{-1-1}_{n-1}}\;\underbrace{\frac{d}{dx}\left(-\ln x\right)}_{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1\left(-\ln x\right)^{-2}\left[-\frac{\frac{d}{dx}x}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -1\left(-\ln x\right)^{-2}\left[-\frac{1}{x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\left(-\ln x\right)^{2}}$$

Nuevamente, por las propiedades de los logaritmos, pasando el coeficiente del logaritmo como exponente del argumento:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\left(\ln x^{-1}\right)^{2}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\ln^{2}\frac{1}{x}}}$$

EJERCICIO 8.1

Obtener la derivada de las siguientes funciones:

1) $y = ln\ 6x$

2) $y = ln\ x^8$

3) $y = ln(3x+7)$

4) $y = ln(4x^3 - 9x^2 + x - 7)$

5) $y = ln\sqrt{8x}$

6) $y = ln\sqrt[5]{7x^2}$

7) $y = ln\dfrac{6}{7x}$

8) $y = ln(7-x)^5$

9) $y = ln\dfrac{6}{4x^2 - x - 1}$

10) $y = e^{7x}$

11) $y = e^{4x-8}$

12) $y = e^{7-x}$

13) $y = e^{2/\sqrt{7x}}$

14) $y = e^{2/\sqrt{x}}$

15) $y = 5xe^{x^6}$

16) $y = x^5e^{8x}$

17) $y = (5-x)ln(5-x)$

18) $y = ln\dfrac{3}{x^2}$

Avanzados:

19) $y = ln^5\sqrt{2x-9}$

20) $y = \sqrt{3-x}\ ln(x^5 - x)$

21) $y = tan\ e^{5x}$

22) $y = sen\ ln(7x-6)$

23) $y = csc\ e^{-6x}$

24) $y = cos\ ln(6-13x)$

25) $y = cot\, 4x\; ln\, 5x$

26) $y = \dfrac{8}{ln\left(8x-9\right)}$

27) $y = \sqrt{ln\left(7-x\right)}$

28) $y = \sqrt[4]{e^{9x}}$

29) $y = ln\, \sqrt[8]{\left(5x^6 - x\right)^9}$

30) $y = \dfrac{3}{\sqrt[5]{ln^4\, 2x}}$

31) $y = ln\; cot\, 2x$

32) $y = ln\left[x^5\left(2x-7\right)^6\right]$

33) $y = \dfrac{3}{e^{2x}}$

34) $y = \dfrac{6}{e^{sen\, 2x}}$