8 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

ÍNDICE PARTICULAR

CONCEPTO

Una ecuación es una especie de "adivinanza numérica" , o sea que se hace un planteamiento cuya respuesta debe ser un número. Por ejemplo: ¿Qué número elevado al cuadrado es igual al doble de ese número más veinticuatro? Es una adivinanza cuya respuesta es el número 6. La diferencia entre cualquier adivinanza con las adivinanzas numéricas, llamadas *ecuaciones* , es que para responder a las primeras hay que atinarle a la respuesta, mientras que en las numéricas existen procedimientos que conducen certera e infaliblemente a la solución. ¿De qué color era el caballo blanco de Napoleón? , no existe un procedimiento que conduzca a la respuesta de manera infalible, sino que hay que hacer intentos para atinarle a la respuesta.

Dos diferencias entre las adivinanzas comunes y las adivinanzas numéricas (ecuaciones) son:

1) En las adivinanzas comunes no existe un proceso que conduzca certeramente a la respuesta (hay que atinarle), mientras que en las numéricas (ecuaciones) sí lo hay.

2) Las adivinanzas comunes no pueden representarse de ninguna forma, mientras que las numéricas (ecuaciones) pueden convertirse a símbolos.

Efectivamente, las adivinanzas numéricas, llamadas ecuaciones, se pueden transformar a símbolos matemáticos, como se muestra en los siguientes ejemplos:

ADIVINANZA NUMÉRICA	TRANSFORMACIÓN A SÍMBOLOS MATEMÁTICOS
El doble de un número más cinco es igual a trece. ¿Cuál es ese número?	$2x + 5 = 13$
La mitad de un número más once es igual a ese mismo número. ¿Cuál es ese número?	$\frac{1}{2}x + 11 = x$
El triple del cuadrado de un número es igual a ese número más 70. ¿Cuál es ese número?	$3x^2 = x + 70$
Un número más su cuadrado es igual a uno entre la raíz cuadrada de ese número más uno. ¿Cuál es ese número?	$x + x^2 = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Algunas de las respuestas a estas adivinanzas numéricas (ecuaciones) pueden obtenerse mentalmente, pero como en el caso del último ejemplo, ya no es tan simple. Sin embargo, con un proceso determinado se puede llegar a la respuesta certeramente. Ese proceso es el conocido como *resolver una ecuación* .

DOS LEYES FUNDAMENTALES DE LAS ECUACIONES

Las ecuaciones tienen dos leyes muy importantes, que son:

1ª LEY: *Toda ecuación polinomial tiene tantas soluciones como su grado sea.*

Esto quiere decir que una ecuación de primer grado tiene exactamente una solución; una ecuación de segundo grado tiene exactamente dos soluciones; una ecuaciones de tercer grado tiene exactamente tres soluciones; y así sucesivamente.

Que una ecuación tenga dos soluciones significa que hay dos respuestas que satisfacen a la adivinanza numérica. Por ejemplo, ¿Qué número elevado al cuadrado menos el triple de ese mismo número más dos da igual a cero?. Pasando a símbolos matemáticos se obtiene la representación $x^2 - 3x + 2 = 0$. Por la ley anterior, como es una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, o sea, hay dos respuestas a la anterior adivinanza. Efectivamente, son el 1 y el 2.

2ª LEY: *Se requieren tantas ecuaciones como incógnitas se tengan para que se puedan resolver las ecuaciones o el sistema.*

Esto quiere decir que si se tiene una sola incógnita es suficiente con una sola ecuación para poder hallar su valor (para poder resolverla); si se tienen dos incógnitas, son necesarias dos ecuaciones para poder hallar sus valores; si se tienen tres incógnitas, se requieren de tres ecuaciones para poder hallar sus valores, y así sucesivamente.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En la secundaria se estudiaron ecuaciones de primero y segundo grado, pero sin fracciones. Lo que en este curso se va a agregar es cuando sí hay fracciones.

Realmente la solución de ecuaciones de primer grado, cuando aparecen fracciones, se limita a eliminar los denominadores, aplicando la propiedad de las igualdades *lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado también para que la igualdad se conserve*. Esta ley se aplica al multiplicar toda la ecuación por aquella cantidad que elimine a todos los denominadores. Una vez conseguido esto, simplemente se despeja la incógnita.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{x}{2} = x + 1$

Solución: La ecuación anterior es la representación simbólica de la adivinanza «La quinta parte del triple de un número sumado a la mitad de ese mismo número es igual a dicho número sumado a 1. ¿cuál es ese número?»

Para eliminar el denominador 5 debe multiplicarse toda la igualdad por 5, pero no elimina al segundo denominador, el 2. Para eliminar el denominador 2 deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por 2. Entonces, para conseguir eliminar simultáneamente ambos denominadores en un solo paso, se deben multiplicar ambos lados de la igualdad por el 5 y por el 2, es decir por 10:

$$10\left(\frac{3x}{5} + \frac{x}{2}\right) = 10(x+1)$$

Realizando las multiplicaciones indicadas y simplificando, se obtiene que

$$\frac{30x}{5} + \frac{10x}{2} = 10x + 10$$

$$6x + 5x = 10x + 10$$

$$6x + 5x \underline{\underline{-10x}} = 10x + 10 \underline{\underline{-10x}}$$

Recuérdese que el $10x$ que aparece inicialmente en el paso anterior del lado derecho NO PASA a restar al lado izquierdo, sino que se resta en ambos lados (por la propiedad de las igualdades) $10x$ para que se elimine de ese lado derecho.

$$\boxed{x = 10}$$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $\dfrac{5x+1}{22} + \dfrac{10-3x}{6} = \dfrac{7}{6}$

Solución: Para eliminar el denominador 22 debe multiplicarse toda la igualdad por 22, pero de esta manera se logra eliminar solamente ese denominador 22, pero no el segundo ni el tercer denominador, el 6. Para eliminar el segundo y tercer denominador, el 6, deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por 6, pero nada más se eliminan los denominadores 6, pero no el denominador 22. Entonces, para conseguir eliminar simultáneamente los tres denominadores en un solo paso se deben multiplicar ambos lados de la igualdad por el 22 y por el 6, es decir por 132:

$$132\left(\frac{5x+1}{22} + \frac{10-3x}{6}\right) = 132\left(\frac{7}{6}\right)$$

Realizando las multiplicaciones indicadas y simplificando, se obtiene que

$$\frac{\overset{6}{\cancel{132}}(5x+1)}{\cancel{22}} + \frac{\overset{22}{\cancel{132}}(10-3x)}{\cancel{6}} = \frac{\overset{22}{\cancel{132}}(7)}{\cancel{6}}$$

$$6(5x+1) + 22(10-3x) = 22(7)$$

$$30x + 6 + 220 - 66x = 154$$

$$-36x + 226 = 154$$

$$-36x + 226 \underline{\underline{- 226}} = 154 \underline{\underline{- 226}}$$

Nuevamente debe recordarse que el 226 que aparece en el paso anterior del lado izquierdo NO SE PASA al otro lado sumando, sino que, por la propiedad de las igualdades, se resta en ambos lados 226 para que desaparezca del lado izquierdo.

$$-36x = -72$$

$$\frac{-36x}{-36} = \frac{-72}{-36}$$

Aquí tampoco se pasó a dividir el (- 36) del paso anterior para despejar la x, sino que se dividió toda la igualdad entre dicho (- 36). Si se simplifica la fracción del lado izquierdo queda como se muestra en este siguiente paso:

$$x = \frac{-72}{-36}$$

$$\boxed{x = 2}$$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $\frac{5}{2x-1} + \frac{3}{4} = 2$

Solución: Para eliminar el primer denominador debe multiplicarse toda la igualdad por $(2x - 1)$, pero de esta manera se logra eliminar solamente el denominador $(2x - 1)$, pero no el segundo, el 4. Para eliminar este segundo denominador 4 se requiere multiplicar toda la igualdad por dicho 4, pero con eso solamente se consigue eliminar el segundo denominador, no el primero. Entonces, por lo explicado en los dos ejemplos anteriores, para eliminar ambos denominadores simultáneamente debe multiplicarse toda la igualdad por $(2x - 1)(4)$:

$$(2x-1)(4)\left[\frac{5}{2x-1} + \frac{3}{4}\right] = (2x-1)(4)[2]$$

$$\cancel{(2x-1)}(4)\left[\frac{5}{\cancel{2x-1}}\right] + (2x-1)\cancel{(4)}\left[\frac{3}{\cancel{4}}\right] = (2x-1)(4)[2]$$

$$(4)(5) + (2x - 1)(3) = (2x - 1)(8)$$
$$20 + 6x - 3 = 16x - 8$$
$$17 + 6x = 16x - 8$$
$$17 + 6x \underbrace{- 17 - 16x} = 16x - 8 \underbrace{- 17 - 16x}$$

$$- 10x = - 25$$

$$\frac{-10x}{-10} = \frac{-25}{-10}$$

Obsérvese nuevamente cómo el coeficiente (- 10) NO PASA al otro lado dividiendo, sino que toda la igualdad se dividió entre dicha cantidad.

$$x = \frac{-25}{-10}$$

$$\boxed{x = \frac{5}{2}}$$

EJERCICIO 8.1

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{2x}{9} + x = \frac{11}{3}$

2) $\frac{9x}{4} + \frac{x}{3} = \frac{31}{6}$

3) $\frac{11x}{8} + x = 19$

4) $\frac{x}{7} + \frac{x}{3} = x - 11$

5) $\frac{2x}{7} + \frac{9x}{5} = 2x + 3$

6) $\frac{4x}{9} - \frac{3x}{8} = \frac{x}{36} + 3$

7) $\frac{3x+21}{7} + \frac{2x+15}{5} = 6$

8) $\frac{11-2x}{13} = x + \frac{x+7}{3}$

9) $\frac{13x+24}{6} + \frac{19x-8}{2} = x$

10) $\frac{2x-5}{19} - \frac{13-x}{19} = \frac{18}{19}$

11) $\frac{15}{x} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$

12) $\frac{12}{2-x} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

13) $\frac{72}{8-11x} - \frac{3}{7} = \frac{60}{7}$

14) $\frac{30}{1-3x} + \frac{1}{31} = 1$

15) $2 - \frac{3}{7-2x} + \frac{2}{3} = 5$

16) $\frac{2}{x} - \frac{4}{5} = \frac{12}{21}$

17) $\frac{2x-13}{3x-17} = \frac{4}{7}$

18) $\frac{3-20x}{1-17x} + 8 = \frac{3}{7}$

19) $\frac{5x}{5x-1} - \frac{1}{2} = 0$

20) $6 - \frac{2-19x}{17} = \frac{3x}{11}$

PROBLEMAS EN CONTEXTO

21) Si a la mitad de cierto número se le suma la tercera parte del mismo número se obtiene 35. Encontrar ese número.

22) La suma de dos números es 97. Si el mayor es dividido entre el menor, el cociente es 4 y el residuo es 7. Hallar ambos números.

23) ¿Qué mismo número debe sumarse al mismo tiempo al numerador y al denominador de $\frac{9}{14}$ para obtener $\frac{3}{4}$?

24) ¿Cuánta agua debe agregarse a 40 litros de una solución de alcohol del 15% para reducir su concentración al 12%?

25) Un agricultor puede arar su campo en 12 horas y su hijo en 15 horas. Si trabajan juntos usando dos arados, ¿cuánto tardarán en arar el campo?

26) Un equipo de béisbol ha ganado 36 juegos y perdido 40. ¿cuántos juegos debe ganar consecutivamente para elevar su porcentaje de triunfos al 60%?

27) El largo de un rectángulo es $\frac{4}{3}$ de su ancho. Se forma otro rectángulo disminuyendo dos decímetros la longitud anterior y aumentando en 9 decímetros el ancho, obteniéndose un nuevo rectángulo cuyo perímetro es $\frac{6}{5}$ del primer rectángulo. Calcular las dimensiones de ambos rectángulos.

28) Jorge tiene la sexta parte de la edad de su padre y dentro de 12 años ya solamente tendrá la tercera parte de la edad de su padre. ¿cuáles son las edades actuales de ambos?

29) Un carpintero puede hacer un trabajo en 8 horas mientras que su ayudante lo haría en 10 horas. Comienzan a trabajar juntos, pero a las dos horas de que empezaron llaman al carpintero para otro trabajo, quedándose el ayudante solo hasta terminarlo. ¿cuánto tiempo trabajó solo el ayudante hasta terminar?

30) Un albañil puede hacer un trabajo solo en 9 horas mientras que su ayudante en 12 horas. El albañil comienza a trabajar solo y a las dos horas se le une el ayudante. ¿cuántas horas trabajan juntos hasta terminar?

31) Una máquina A puede ser operada para terminar un trabajo en el triple del tiempo que emplea otra máquina B más moderna para hacer lo mismo. Se usa la máquina más rápida por 5 días y después se continúa trabajando con la más lenta, terminando en 4 días más. ¿cuánto hubiera tardado la máquina más rápida si hubiera ella hecho todo el trabajo?

32) Un comerciante compra 177 artículos. Luego de quedarse con 4 para su uso personal, vende todos los demás a un precio que le reditúa $25.00 de ganancia por unidad (por cada artículo), lo que le genera una ganancia total de $3 045.00. Calcular el número de artículos iniciales que compró.