9 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

ÍNDICE PARTICULAR

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR LA FÓRMULA GENERAL

En la secundaria se estudiaron ecuaciones de segundo grado, pero sin fracciones. Lo que en este curso se va a agregar es cuando sí hay fracciones.

La parte principal en la solución de ecuaciones de segundo grado, cuando aparecen fracciones, consiste en eliminar los denominadores aplicando la propiedad de las igualdades *lo que se haga de un lado debe hacerse del otro lado de la igualdad también para que la igualdad se conserve*. Esta ley se aplica al multiplicar toda la ecuación por aquella, o aquellas, cantidad(es) que elimine(n) a todos los denominadores. Conseguido esto, simplemente se ordena en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se aplica la fórmula para las ecuaciones de segundo grado. Dicha fórmula es:

La fórmula general para las ecuaciones de segundo grado es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

en donde a *es el coeficiente de* x^2
b *es el coeficiente de* x
c *es el término independiente* (*el que no tiene* x)

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $\frac{5x-3}{x} + \frac{x-1}{5} = 2$

Solución: Para eliminar el primer denominador debe multiplicarse toda la igualdad por x, pero no elimina el denominador 5. Para eliminar el segundo denominador, el 5, deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por 5, pero de esta manera se logra ahora eliminar únicamente el segundo denominador, pero no el primero. Entonces, para conseguir eliminar simultáneamente ambos denominadores en un solo paso, se deben multiplicar ambos lados de la igualdad por x y por el 5, es decir por $5x$:

$$5x\left(\frac{5x-3}{x} + \frac{x-1}{5}\right) = 5x(2)$$

$$5\cancel{x}\left(\frac{5x-3}{\cancel{x}}\right) + \cancel{5}x\left(\frac{x-1}{\cancel{5}}\right) = 10x$$

$$\begin{aligned} 5(5x - 3) + x(x - 1) &= 10x \\ 25x - 15 + x^2 - x &= 10x \end{aligned}$$

$$25x - 15 + x^2 - x - 10x \qquad = 10x - 10x$$

Recuérdese que el $10x$ que aparece inicialmente a la derecha del signo $=$ NO PASA al otro lado restando, sino que, por las propiedades de las igualdades, se resta en ambos lados $-10x$ para eliminarlo del lado derecho.

ordenando y sumando términos semejantes:

$$x^2 + 25x - x - 10x - 15 = 0$$

$$x^2 + 14x - 15 = 0 \qquad \text{(forma general)}$$

en donde: $a = 1;$
$b = 14;$
$c = -15$

sustituyendo en la fórmula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 60}}{2}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-14 \pm 16}{2}$$

de donde se obtienen las dos soluciones:

$$x_1 = \frac{-14 + 16}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

$$x_2 = \frac{-14 - 16}{2} = \frac{-30}{2}$$

$$\boxed{x_2 = -15}$$

Cuando se emplea la calculadora **Casio** *Fx-95 MS*, deben realizarse todos los primeros pasos indicados en este ejemplo hasta llegar a la forma general de las ecuaciones de 2º grado, o sea hasta haberla transformado a la forma $x^2 + 14x - 15 = 0$. A continuación debe hacerse lo siguiente:

a) Borrar de las memorias de la calculadora todo registro anterior y ponerla en modo de cálculo, tecleando

SHIFT CLR 2 =

b) Para ingresar a las ecuaciones de 2º grado, teclear:

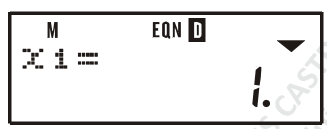
MODE MODE 1 REPLAY ▷ 2

c) Al aparecer la pantalla

la calculadora está preguntando por el valor del coeficiente a. Teclearlo y para que dejarlo registrado en la memoria de la calculadora, oprimir =. En la pantalla anterior, EQN significa que la calculadora está en modo de ecuación y D indica al usuario que está en modo deg (medidas angulares)

Repetir el proceso con los valores de b y de c. Para ingresar un valor negativo debe hacerse con la tecla (−) .

Después de ingresar el valor del coeficiente c, aparece la pantalla



significa que el valor de la primera solución x_1 es igual a 1 . Para visualizar la segunda solución existen dos formas: en una basta oprimir la tecla =; la segunda está dada por el triángulo que aparece en la parte superior derecha ▼ que indica que con la tecla REPLAY y hacia abajo aparecerá en pantalla la segunda solución. Para regresar a la primera solución, basta oprimir REPLAY y hacia arriba, según el indicativo del triángulo ▲.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $\frac{8-2x}{x+4}+\frac{2x+7}{3x+8}=13$

Solución: Para eliminar el primer denominador debe multiplicarse toda la igualdad por $(x+4)$, lo que no elimina el segundo denominador. Para eliminar este segundo denominador, deben multiplicarse ambos lados de la igualdad por $(3x+8)$. Sin embargo, obsérvese que de esta manera se logra ahora eliminar únicamente el segundo denominador, pero no el primero. Entonces, para conseguir eliminar simultáneamente ambos denominadores en un solo paso, se deben multiplicar ambos lados de la igualdad por $(x + 4)$ y por $(3x + 8)$, es decir por $(x + 4)(3x + 8)$:

$$(x+4)(3x+8)\left[\frac{8-2x}{x+4}+\frac{2x+7}{3x+8}\right] = (x+4)(3x+8)[13]$$

$$\cancel{(x+4)}(3x+8)\left[\frac{8-2x}{\cancel{x+4}}\right]+(x+4)\cancel{(3x+8)}\left[\frac{2x+7}{\cancel{3x+8}}\right]=(x+4)(3x+8)[13]$$

Realizando las multiplicaciones indicadas, simplificando y ordenando la ecuación en la forma que debe escribirse una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, se obtiene que

$$(3x + 8)(8 - 2x) + (x + 4)(2x + 7) = (x + 4)(3x + 8)13$$
$$24x + 64 - 6x^2 - 16x + 2x^2 + 8x + 7x + 28 = (3x^2 + 12x + 8x + 32)13$$
$$24x + 64 - 6x^2 - 16x + 2x^2 + 8x + 7x + 28 = 39x^2 + 156x + 104x + 416$$
$$43x^2 + 237x + 324 = 0$$

en donde: $a = 43$;
$b = 237$;
$c = 324$

sustituyendo en la fórmula general: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-237\pm\sqrt{237^2-4(43)(324)}}{2(43)}$$

$$x=\frac{-237\pm\sqrt{441}}{86}$$

$$x=\frac{-237\pm 21}{86}$$

de donde se obtienen las dos soluciones:

$$x_1=\frac{-237+21}{86}=\frac{-216}{86}$$

$$\boxed{x_1=\frac{-108}{43}}$$

$$x_2=\frac{-237-21}{86}=\frac{-258}{86}$$

$$\boxed{x_2=-3}$$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $\frac{x}{2} + 2 = \frac{11}{3-x}$

Solución: Para eliminar los dos denominadores simultáneamente, por lo explicado en los dos ejemplos anteriores, aplicando la propiedad de las igualdades debe multiplicarse toda la ecuación por $2(3-x)$:

$$2(3-x)\left(\frac{x}{2}+2\right) = 2(3-x)\left(\frac{11}{3-x}\right)$$

$$\cancel{2}(3-x)\left(\frac{x}{\cancel{2}}\right) + 2(3-x)(2) = 2\cancel{(3-x)}\left(\frac{11}{\cancel{3-x}}\right)$$

Realizando las multiplicaciones indicadas, simplificando y ordenando la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se obtiene que

$$(3 - x)(x) + 2(3 - x)(2) = 2(11)$$
$$3x - x^2 + 12 - 4x = 22$$
$$-x^2 - x - 10 = 0$$
$$x^2 + x + 10 = 0 \quad \text{(multiplicando toda la igualdad por } -1\text{)}$$

en donde: $a = 1$
$b = 1$
$c = 10$

sustituyendo en la fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

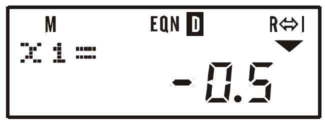
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-39}}{2}$$

Cuando la raíz cuadrada resulta negativa significa que la ecuación no tiene solución[1], es decir que ningún número al cuadrado más ese mismo número más diez resulte cero. O bien, visto desde el

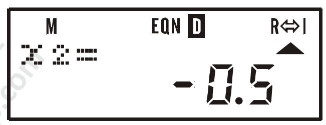
[1] La afirmación de que no tiene solución significa que en los números reales no existe ningún número que sea solución de la ecuación, en donde los números reales son los que conoce el alumno hasta este nivel de estudios en que se encuentra. Pero ciertamente existen otros números, desconocidos en este grado de preparatoria por el alumno, que sí solucionan la ecuación anterior, llamados números complejos.

enunciado original, no existe ningún número cuya mitad más dos sea igual a once dividido entre tres menos ese número.

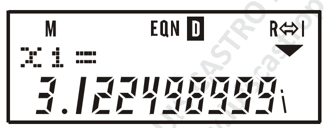
Si se realiza con la calculadora **Casio** *fx-95MS* debe tenerse mucho cuidado, ya que en vez de que marque ERROR como sería de esperar, despliega la siguiente pantalla



En la parte superior derecha aparece **R ↔ I** el cual es el indicativo de que la raíz cuadrada de la fórmula general dio negativa y que no existen soluciones en los números reales. Si se oprime la tecla [=] o bien [REPLAY] ▼ (hacia abajo), aparece la pantalla



que aparentemente dice que la segunda solución es la misma que la anterior. Pero no es así. Para quienes ya conozcan los números complejos, significa que la parte real R es igual a 0.5 (dada con x_1 y x_2 de la pantalla) y para que la calculadora muestre la parte imaginaria debe teclearse [SHIFT] [=].



Si no se tiene cuidado en vigilar que no aparezca en la parte superior de la pantalla de la calculadora el indicativo **R ↔ I**, se cometerá el error de poner como soluciones de la ecuación $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 0.5$.

Ejemplo 4: Resolver la ecuación $x - \dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{3}{x+2} - 2$

Solución: Para eliminar el denominador $(x+2)$ repetido dos veces, por lo explicado en los ejemplos anteriores, debe multiplicarse toda la igualdad por $(x + 2)$:

$$(x+2)\left(x - \frac{2x}{x+2}\right) = (x+2)\left(\frac{3}{x+2} - 2\right)$$

$$(x+2)(x)+\cancel{(x+2)}\left(-\frac{2x}{\cancel{x+2}}\right) = \cancel{(x+2)}\left(\frac{3}{\cancel{x+2}}\right)+(x+2)(-2)$$

Realizando las multiplicaciones indicadas, simplificando y ordenando la ecuación en la forma $ax^2+bx+c=0$, se obtiene que

$$\begin{aligned}(x+2)x - 2x &= 3 - (x+2)(2)\\ x^2+2x-2x &= 3-2x-4\\ x^2+2x-2x+2x-3+4 &= 0\\ x^2+2x+1 &= 0\end{aligned}$$

en donde: $a = 1$
$b = 2$
$c = 1$

sustituyendo en la fórmula general: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$$

De donde se obtienen las dos soluciones

$$x_1=\frac{-2+0}{2}$$

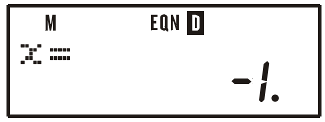
$$\boxed{x_1=-1}$$

$$x_2=\frac{-2-0}{2}$$

$$\boxed{x_2=-1}$$

Cuando la raíz cuadrada de la fórmula general da cero, las dos soluciones son iguales. No significa lo anterior que solamente exista una solución, sino que ambas son iguales. Se dice entonces que es un caso de *soluciones repetidas*.

Si se realiza con la calculadora **Casio** *fx-95MS* debe tenerse mucho cuidado, ya que en vez de que despliegue los dos resultados como sería de esperar, despliega la siguiente y única pantalla



en la que parecería que solamente existe una solución. En casos así debe tenerse presente que se trata de una ecuación con dos soluciones repetidas.

EJERCICIO 9.1

Resolver las siguientes ecuaciones por la fórmula general o con la calculadora:

1) $\dfrac{5+2x}{x+1}+\dfrac{x}{2}=2x$

2) $\dfrac{7-x}{3x+4}+\dfrac{x+1}{5}=8$

3) $\dfrac{11x+17}{13x+5}+\dfrac{9x+4}{x-10}=3$

4) $\dfrac{8-x}{x-6}+\dfrac{2x}{x+7}=2$

5) $\dfrac{17+8x}{x+3}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{11+x}{7}$

6) $\dfrac{2x-15}{3}+\dfrac{x^2-7x}{5}=\dfrac{3x+5}{15}$

7) $\dfrac{2x^2-x+3}{12}-\dfrac{x^2+7x}{6}=\dfrac{1}{4}$

8) $\dfrac{3x^2+11x-8}{24}-\dfrac{x^2+x+2}{3}=x-1$

9) $\dfrac{x-90}{110-x}=x-99$

10) $\dfrac{3x+3}{11-x}-\dfrac{5x+5}{2x+17}=0$

11) $\dfrac{-2x}{3} = \dfrac{x+2}{x-1} + \dfrac{1}{3}$

12) $3x + \dfrac{3x}{1-3x} = \dfrac{2}{1-3x}$

13) $x = \dfrac{-4}{x+4} - 4$

14) $5x = \dfrac{16x+5}{3-x} - 1$

15) $4x + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{3x+1}{2-x}$

16) $9x + \dfrac{5x}{x-2} + \dfrac{x+4}{x-2} = 0$

PROBLEMAS EN CONTEXTO

17) Si el radio de un círculo se incrementa en 4 unidades, el área resultante es igual al área original multiplicada por nueve. Calcular el radio del círculo original.

18) El área de un triángulo es de 42 metros cuadrados. Si la altura es 5 metros mayor que la base, calcular las dimensiones de dicho triángulo.

19) Calcular las dimensiones de un rectángulo que tiene por perímetro $p = 64$ metros y por área $a = 252$ metros cuadrados.

20) En una fábrica de cortinas, la empleada A puede hacer una cortina en $\dfrac{14}{3}$ horas menos que la empleada B.

Cuando trabajan juntas se tardan 8 horas en concluir la cortina. ¿cuánto tiempo requiere cada empleada para terminar ella sola una cortina?

21) El costo de la fiesta anual de un grupo de amigos se divide entre los miembros que asisten. El año pasado el costo total fue de \$22 545.00 y este año de \$22 294.00, pero el costo por miembro resultó menor en \$7.00 el año anterior respecto de éste. Calcúlense las personas que asistieron cada año al evento si el primer año asistieron diez personas más que ahora?

22) Una manguera de 3/4 de pulgada de diámetro puede llenar una alberca en 7 horas. Otra manguera de 5/6 de pulgada de diámetro la llena en 12 horas. ¿en cuánto tiempo se llena la alberca empleando ambas mangueras a la vez?

23) Un rectángulo tiene un área de 127.5 metros cuadrados. Si la base se disminuye en 2.5 metros y la altura se incrementa en 0.8 metros, el área del nuevo rectángulo es ahora de 110 metros cuadrados. Calcular las dimensiones del rectángulo original.