X

DIVERSOS CAMBIOS DE VARIABLE TRIGONOMÉTRICOS

Para integrales de la forma $\int p(x)^{\pm 1}\left(\pm a^2x^2 \pm b^2\right)^{\pm\frac{1}{2}}dx$, en donde $p(x)$ es un polinomio en el numerador o en el denominador (según tome el exponente el valor de $+1$ o de -1), mientras que el binomio $\left(\pm a^2x^2 \pm b^2\right)$ es una raíz cuadrada que puede ir también en el numerador o en el denominador, se debe hacer uno de los cambios de variable siguientes, según corresponda a la forma del radical:

para el radical	hacer el cambio	
$\sqrt{a^2x^2+b^2}$	$x=\dfrac{b}{a}\tan t$	1
$\sqrt{a^2x^2-b^2}$	$x=\dfrac{b}{a}\sec t$	2
$\sqrt{b^2-a^2x^2}$	$x=\dfrac{b}{a}\operatorname{sen} t$	3

Esta técnica de integración consta de tres grandes pasos:

PASO 1: Hacer el cambio de variable que le corresponda conforme al radical que aparezca y efectuar las operaciones algebraicas necesarias para que desaparezca el radical, con lo cual la integral original se transforma en una integral trigonométrica.

PASO 2: Realizar la integral trigonométrica que resultó en el paso anterior.

PASO 3: Regresar a la variable original, para lo cual:

a) Se despeja la función trigonométrica del cambio de variable hecho inicialmente;
b) se construye un triángulo rectángulo congruente con la función trigonométrica anterior y se calcula el tercer lado por el teorema de Pitágoras, el cual siempre va a ser la raíz cuadrada original. De allí se deducen los valores de las demás funciones trigonométricas que hayan aparecido en la integración (en el paso 2);
c) se sustituyen los equivalentes de dichas funciones trigonométricas en el resultado de la integración del paso 2.

Ejemplo 1: Integrar $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x}\,dx$

Solución: Esta integral es de la forma mencionada al principio de este capítulo, ya que el polinomio es x (en el denominador) y el radical de la forma $\sqrt{a^2x^2 - b^2}$ aparece en el numerador, en donde

$$a^2 = 4$$
$$b^2 = 9$$
$$a = 2$$
$$b = 3$$

le corresponde, conforme a la tabla de la página 149, el cambio de variable (2) , es decir, debe hacerse

PASO 1:

Sea $x = \frac{3}{2} \sec t$

de donde

$$dx = \frac{3}{2} \tan t \sec t \, dt$$

y además

$$x^2 = \frac{9}{4} \sec^2 t$$

sustituyendo en la integral original:

$$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9} \, dx}{x} = \int \frac{\sqrt{\cancel{4}\left(\frac{9}{\cancel{4}} \sec^2 t\right) - 9} \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \tan t \cancel{\sec t} \, dt\right)}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cancel{\sec t}}$$

$$= \int \sqrt{9 \sec^2 t - 9} \; \tan t \, dt$$

$$= \int \sqrt{9\underbrace{\left(\sec^2 t - 1\right)}} \; \tan t \, dt$$

y como $\overbrace{\sec^2 t - 1} = \tan^2 t$:

$$= \int \sqrt{9 \tan^2 t} \; \tan t \; dt$$

$$= \int (3 \tan t) \tan t \, dt$$

$$= 3 \int \tan^2 t \, dt$$

Hasta aquí está realizado el paso1. Obsérvese que se eliminó la raíz cuadrada y la integral original se convirtió en una integral trigonométrica. El paso 2 consiste en resolver esta integral trigonométrica que resultó del paso 1.

PASO 2:

$$
\begin{aligned}
3\int tan^2 t\, dt &= 3\int \left(sec^2 t - 1\right) dt \\
&= 3\int sec^2 t\, dt - 3\int dt \\
&= 3\,tan\, t - 3t + c
\end{aligned}
$$

Hasta aquí está resuelta la integral trigonométrica, pero en términos de la variable t que no es la original. El paso 3 consiste en regresar a la variable original x.

PASO 3:

a) El cambio de variable original fue $x = \dfrac{3}{2} sec\, t$. Despejando de aquí la función trigonométrica resulta que

$$sec\, t = \frac{2x}{3}$$

b) Para construir un triángulo rectángulo congruente con esa función trigonométrica debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas solamente se sacan a ángulos, por lo tanto, si se tiene la *secante* de t, implica que t es el ángulo. Además, como la función *secante* es la hipotenusa entre el cateto adyacente, se deduce que $2x$ es la hipotenusa y que 3 es el cateto adyacente. Ver el triángulo rectángulo de la figura 10.1.

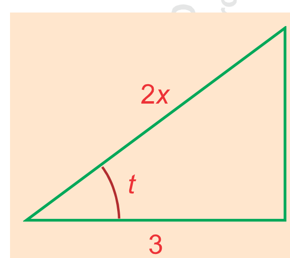

figura 10.1

El tercer lado, en este caso el cateto opuesto a t, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras, el cual es siempre la raíz cuadrada original, $\sqrt{4x^2 - 9}$ (figura 10.2).

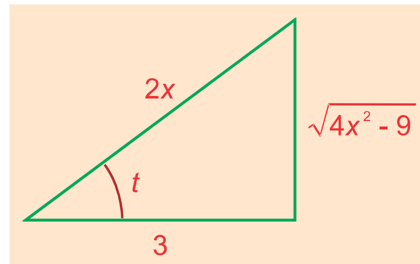

figura 10.2

Recordando que el resultado de la integración fue $3\,tan\,t - 3t + c$, del triángulo de la figura 10.2 debe deducirse el valor de la *tangente* de t (cateto opuesto entre cateto adyacente), o sea

$$tan\,t = \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{3}$$

y de aquí mismo se obtiene que

$$t = arc\ tan \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{3}$$

aunque también del cambio de variable original,

$$t = arc\ sec \frac{2x}{3}$$

c) Sustituyendo en el resultado de la integración trigonométrica:

$$3\,tan\,t - 3t + c = 3\left(\frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{3}\right) - 3\left(arc\ sec \frac{2x}{3}\right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx = \sqrt{4x^2-9} - 3\,arc\,sec\frac{2x}{3} + c}$$

COMPROBACIÓN:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-9}} - 3\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{4x^2}{9}-1}}\right)$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} - \frac{3}{x\sqrt{\frac{4x^2-9}{9}}}$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} - \frac{3}{x\left(\frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right)}$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{4x^2-9}} - \frac{9}{x\sqrt{4x^2-9}}$$

$$= \frac{4x^2-9}{x\sqrt{4x^2-9}}$$

$$= \frac{\left(\cancel{\sqrt{4x^2-9}}\right)\left(\sqrt{4x^2-9}\right)}{x\cancel{\sqrt{4x^2-9}}}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}$$

Ejemplo 2: Integrar $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

Solución: Esta integral es de la forma mencionada al principio de este capítulo, ya que el polinomio es x^2 (en el numerador) y el radical de la forma $\sqrt{b^2-a^2x^2}$ aparece en el denominador, en donde

$$
\begin{aligned}
a^2 &= 4\\
b^2 &= 25\\
a &= 2\\
b &= 5
\end{aligned}
$$

le corresponde, conforme a la tabla de la página 149, el cambio de variable (3) , es decir, debe hacerse

PASO 1:

Sea $\displaystyle x = \frac{5}{2}\,sen\,t$

de donde

$$dx = \frac{5}{2}\cos t\;dt$$

y además

$$x^2 = \frac{25}{4}\,sen^2 t$$

sustituyendo en la integral original:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-4x^2}} = \int \frac{\dfrac{25}{4}\,sen^2 t\left(\dfrac{5}{2}\cos t\;dt\right)}{\sqrt{25-4\left(\dfrac{25}{4}\,sen^2 t\right)}}$$

$$= \frac{125}{8}\int \frac{sen^2 t\ cos\, t\ dt}{\sqrt{25 - 25 sen^2 t}}$$

$$= \frac{125}{8}\int \frac{sen^2 t\ cos\, t\ dt}{\sqrt{25\underbrace{\left(1 - sen^2 t\right)}}}$$

y como $\overbrace{1 - sen^2 t} = cos^2\, t$:

$$= \frac{125}{8}\int \frac{sen^2 t\ cos\, t\ dt}{\sqrt{25\ cos^2\, t}}$$

$$= \frac{\cancel{125}}{8}\int \frac{sen^2 t\ \cancel{cos\, t}\ dt}{\cancel{5}\ \cancel{cos\, t}}$$

$$= \frac{25}{8}\int sen^2 t\ dt$$

Hasta aquí está realizado el paso1. Obsérvese que se eliminó la raíz cuadrada y la integral original se convirtió en una integral trigonométrica. El paso 2 consiste en resolver esta integral trigonométrica que resultó del paso anterior.

PASO 2:

$$\frac{25}{8}\int sen^2 t\ dt = \frac{25}{8}\int \frac{1}{2}\left(1 - cos\, 2t\right) dt$$

$$= \frac{25}{8}\int \frac{1}{2}\, dt - \frac{25}{8}\int \frac{1}{2}\, cos\, 2t\ dt$$

$u = 2t$
$du = 2\ dt$

$$= \frac{25}{16}\int dt - \frac{25}{16}\left[\frac{1}{2}\int cos\ 2t(2dt)\right]$$

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{32}\int cos\, u\ du$$

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{32}sen\ u + c$$

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{32}sen\, 2t + c$$

Hasta aquí está realizada la integral trigonométrica; sin embargo, como el regreso a la variable original requiere la construcción de un triángulo rectángulo en el que el ángulo sea la variable t, debe convertirse la función de ángulo doble $(sen\ 2t)$ a una de ángulo simple a través de igualdades trigonométricas. Para este caso, como $sen\ 2t = 2\ sen\, t\ cos\ t$, entonces el resultado final de la integración trigonométrica debe escribirse como

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{32}(2\ sen\, t\ cos\, t)$$

$$= \frac{25}{16}t - \frac{25}{16}sen\ t\ cos\, t$$

Hasta aquí está resuelta la integral trigonométrica, pero en términos de la variable t que no es la original. El paso 3 consiste en regresar a la variable original x.

PASO 3:

a) El cambio de variable original fue $x = \frac{5}{2}sen\, t$ Despejando de aquí la función trigonométrica resulta que

$$sen\ t = \frac{2x}{5}$$

b) Para construir un triángulo rectángulo congruente con esa función trigonométrica debe tenerse en cuenta que las funciones trigonométricas solamente se sacan a ángulos, por lo tanto, si se tiene el *seno* de t, implica que t es el ángulo. Además, como la función *seno* es el cateto opuesto entre la hipotenusa, se deduce que $2x$ es el cateto opuesto y que 5 es la hipotenusa. Ver el triángulo rectángulo de la figura 10.3.

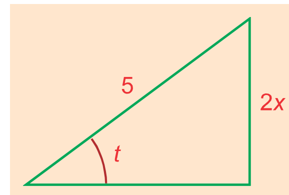

figura 10.3

El tercer lado, en este caso el cateto adyacente a t, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras, el cual es siempre la raíz cuadrada original, $\sqrt{25 - 4x^2}$ como lo muestra la figura 10.4.

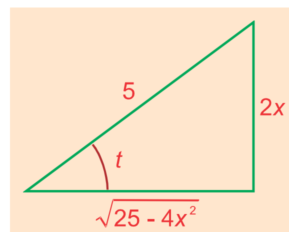

figura 10.4

Recordando que el resultado de la integración fue

$$\frac{25}{16}t - \frac{25}{16}sen\ t\ cos\ t$$

del triángulo de la figura 10.4 debe deducirse el valor del *coseno* de t (cateto adyacente entre hipotenusa), o sea

$$cos\ t = \frac{\sqrt{25 - 4x^2}}{5}$$

y de aquí mismo, despejando se obtiene que

$$t = arc\ cos\ \frac{\sqrt{25 - 4x^2}}{5}$$

aunque también es válido obtener del cambio de variable original,

$$t = arc\ sen\ \frac{2x}{5}$$

c) Sustituyendo en el resultado de la integración trigonométrica:

$$\frac{25}{16}t - \frac{25}{16}sen\ t\cos t = \frac{25}{16}\left(arc\ sen\frac{2x}{5}\right) - \frac{25}{16}\left(\frac{2x}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{25-4x^2}}{5}\right) + c$$

$$= \frac{25}{16}arc\ sen\frac{2x}{5} - \frac{x\sqrt{25-4x^2}}{8} + c$$

$$\boxed{\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{25-4x^2}} = \frac{25}{16}arc\ sen\frac{2x}{5} - \frac{x\sqrt{25-4x^2}}{8} + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{100x^2+49}}$

Solución: Esta integral es de la forma mencionada al principio de este capítulo, ya que el polinomio es x (en el numerador) y el radical de la forma $\sqrt{a^2x^2+b^2}$ aparece en el denominador, en donde

$$a^2 = 100$$
$$b^2 = 49$$
$$a = 10$$
$$b = 7$$

le corresponde el cambio de variable (1) , es decir, debe hacerse

PASO 1:

Sea $$x = \frac{7}{10}\tan t$$

de donde

$$dx = \frac{7}{10}\sec^2 t\, dt$$

y además

$$x^2 = \frac{49}{100}\tan^2 t$$

sustituyendo en la integral original:

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{100x^2 + 49}} = \int \frac{\frac{7}{10}\tan t\left(\frac{7}{10}\sec^2 t\, dt\right)}{\sqrt{100\left(\frac{49}{100}\tan^2 t\right) + 49}}$$

$$= \frac{49}{100}\int \frac{\tan t\, \sec^2 t\, dt}{\sqrt{49\tan^2 t + 49}}$$

$$= \frac{49}{100}\int \frac{\tan t\, \sec^2 t\, dt}{\sqrt{49\underbrace{\left(\tan^2 t + 1\right)}}}$$

y como $\overbrace{\tan^2 t + 1} = \sec^2 t$:

$$= \frac{49}{100}\int \frac{\tan t \sec^2 t\, dt}{\sqrt{49\sec^2 t}}$$

$$= \frac{49}{100} \int \frac{\tan t \sec^2 t \, dt}{7 \sec t}$$

$$= \frac{7}{100} \int \tan t \sec t \, dt$$

Hasta aquí está realizado el paso1. Obsérvese que se eliminó la raíz cuadrada y la integral original se convirtió en una integral trigonométrica. El paso 2 consiste en resolver esta integral trigonométrica que resultó del paso anterior.

PASO 2:

$$\frac{7}{100} \int \tan t \sec t \, dt = \frac{7}{100} \sec t + c \quad \text{(es directa de fórmula)}$$

Hasta aquí está resuelta la integral trigonométrica, pero en términos de la variable t que no es la original. El paso 3 consiste en regresar a la variable original x.

PASO 3:

a) El cambio de variable original fue $x = \frac{7}{10} \tan t$. Despejando de aquí la función trigonométrica resulta que

$$\tan t = \frac{10x}{7}$$

b) Como las funciones trigonométricas solamente se sacan a ángulos, por lo tanto, si se tiene la *tangente de t*, implica que t es el ángulo. Además, como la función *tangente* es el cateto opuesto entre el cateto adyacente, se deduce que 7 es el cateto opuesto y que $10x$ es el cateto adyacente. Ver el triángulo rectángulo de la figura 10.5.

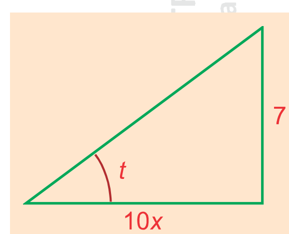

figura 10.5

El tercer lado, en este caso la hipotenusa, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras (la suma de cuadrados de los catetos), el cual es la raíz cuadrada original $\sqrt{100x^2 + 49}$, como lo muestra la figura 10.6.

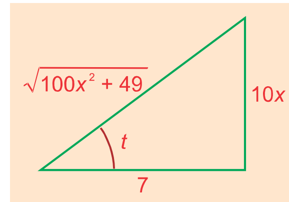

figura 10.6

Recordando que el resultado de la integración fue

$$\frac{7}{100} \sec t + c$$

del triángulo de la figura 10.6 debe deducirse el valor de la *secante* de *t* (hipotenusa entre cateto adyacente), o sea

$$\sec t = \frac{\sqrt{100x^2 + 49}}{7}$$

c) Sustituyendo en el resultado de la integración trigonométrica:

$$\frac{7}{100} \sec t + c = \frac{7}{100} \left(\frac{\sqrt{100x^2 + 49}}{7} \right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{100x^2 + 49}} = \frac{1}{100} \sqrt{100x^2 + 49} \; + c}$$

OTRA FORMA: Esta integral se puede realizar de manera más directa y simple con un simple de variable:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{100x^2 + 49}} = \int \left(100x^2 + 49\right)^{-\frac{1}{2}} x\,dx$$

$$u = 100x^2 + 49$$
$$du = 200x\,dx$$

$$= \frac{1}{200}\int \left(100x^2 + 49\right)^{-\frac{1}{2}} \left(200x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{200}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{200}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{200}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$\boxed{\int \frac{x\,dx}{\sqrt{100x^2 + 49}} = \frac{1}{100}\sqrt{100x^2 + 49} + c}$$

EJERCICIO 10.1

Integrar:

1) $\int x^2 \sqrt{81 - 4x^2}\, dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 121}}{x}\, dx$

3) $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 169}}{x^2}\, dx$

4) $\int \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 121}}\, dx$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 25x^2}}$

6) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{81x^2 + 1}}$

7) $\int \frac{\sqrt{16 - 49x^2}}{x}\, dx$

8) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 100}}{x}\, dx$

9) $\int \frac{\sqrt{1 - 81x^2}}{x^2}\, dx$