IV

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int \left(\pm u^2 \pm a^2\right)^{\frac{k}{2}} dx \text{ , con } k = \pm 1, -2$$

En este capítulo se verán nueve fórmulas más, las cuales pueden enunciarse de manera no formal con el siguiente texto: Son las fórmulas de todas las posibles combinaciones de u^2 y a^2, sumadas o restadas, con raíz cuadrada o sin ella, en el numerador o en el denominador.

a) *Sumadas o restadas*: Según se tome el signo positivo o negativo del $\pm$ que aparece en la forma delante de u y de a.

b) *Con o sin raíz cuadrada*: Si $k = \pm 1$, ya que el exponente toma el valor de ½ o de - ½, o sin raíz cuadrada si $k = -2$.

c) *En el numerador o en el denominador*: Si k es positivo el exponente es positivo y la expresión está en el numerador; si k es negativo el exponente es negativo y la expresión está en el denominador.

Las nueve fórmulas son:

I) Con raíz cuadrada en el numerador:

(8) $$\int \sqrt{u^2 + a^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$$

(9) $$\int \sqrt{u^2 - a^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + c$$

(10) $$\int \sqrt{a^2 - u^2}\; du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\; arc\; sen \frac{u}{a} + c$$

II) Sin raíz cuadrada en el denominador:

(11) $$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\; arc\; tan\; \frac{u}{a} + c$$

(12) $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\; ln\left(\frac{u - a}{u + a}\right) + c$$

(13) $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\; ln\left(\frac{a + u}{a - u}\right) + c$$

III) Con raíz cuadrada en el denominador:

(14) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$$

(15) $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + c$$

$$(16) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\ sen\ \frac{u}{a} + c$$

Ejemplo 1: Integrar $\int \sqrt{9x^2 + 25}\ dx$

Solución: Sean $a^2 = 25$

$u^2 = 9x^2$, por lo que

$u = 3x$

$du = 3dx$

$a = 5$

No olvidar que en el uso de cualquier fórmula debe hacerse cambio de variable. En este caso, si se va a utilizar la fórmula (8) , ésta pide, además del radical, la diferencial du que en este ejemplo vale $3\,dx$. Por lo tanto, tiene que multiplicarse y dividirse la integral original por 3:

$$\int \sqrt{9x^2 + 25}\ dx = \frac{1}{3} \int \underbrace{\sqrt{9x^2 + 25}}_{\sqrt{u^2 + a^2}}\ \underbrace{3\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)\right] + c$$

Sustituyendo los valores de u y a que para este ejemplo corresponden:

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{2}\sqrt{9x^2 + 25} + \frac{25}{2} ln\left(3x + \sqrt{9x^2 + 25}\right)\right] + c$$

$$\boxed{\int \sqrt{9x^2+25}\; dx = \frac{x}{2}\sqrt{9x^2+25} + \frac{25}{6} ln\left(3x+\sqrt{9x^2+25}\right) + c}$$

Ejemplo 2: Integrar $\int \frac{dx}{36-49x^2}$

Solución: La integral tiene la forma de la fórmula (13) , sin raíz cuadrada y en el denominador:

Sean $a^2 = 36$

$u^2 = 49x^2$ por lo que

$u = 7x$

$du = 7dx$

$a = 6$

Para tener la diferencial du que pide la fórmula (13) debe multiplicarse y dividirse la integral original por 7:

$$\int \frac{dx}{36-49x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{\overbrace{7\,dx}^{du}}{\underbrace{36-49x^2}_{a^2-u^2}}$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{du}{a^2-u^2}$$

$$= \frac{1}{7}\left[\frac{1}{2a} ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)\right] + c$$

Sustituyendo los valores de u y a que para este ejemplo corresponden:

$$= \frac{1}{7}\left[\frac{1}{2(6)} ln\left(\frac{6+7x}{6-7x}\right)\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{36-49x^2} = \frac{1}{84} ln\left(\frac{6+7x}{6-7x}\right) + c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{81x^2 - 4}}$

Solución: La integral tiene la forma de la fórmula (15), con raíz cuadrada y en el denominador:

Sean $a^2 = 4$

$u^2 = 81x^2$ por lo que

$u = 9x$

$du = 9dx$

$a = 2$

El 5 del numerador es una constante que puede echarse afuera de la integral. Además, para tener la diferencial du que pide la fórmula (15) debe multiplicarse y dividirse la integral por 9:

$$\int \frac{5\,dx}{\sqrt{81x^2-4}} = 5\left(\frac{1}{9}\right)\int \frac{\overbrace{9\,dx}^{du}}{\underbrace{\sqrt{81x^2-4}}_{\sqrt{u^2-a^2}}}$$

$$= \frac{5}{9}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}$$

$$= \frac{5}{9}\left[ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)\right] + c$$

Sustituyendo los valores de u y a que para este ejemplo corresponden:

$$\boxed{\int \frac{5\,dx}{\sqrt{81x^2-4}} = \frac{5}{9} ln\left(9x+\sqrt{81x^2-4}\right) + c}$$

EJERCICIO 4.1

Realizar las siguientes integrales:

1) $\int \sqrt{64x^2+121}\;dx$

2) $\int \sqrt{81-144x^2}\;dx$

3) $\int \dfrac{7\,dx}{1-4x^2}$

4) $\int \dfrac{2\,dx}{\sqrt{25-169x^2}}$

5) $\int \sqrt{100-9x^2}\;dx$

6) $\int \sqrt{9x^2-1}\;dx$

7) $\int \dfrac{9\,dx}{100x^2+81}$

8) $\int \dfrac{6\,dx}{16x^2-49}$

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

10) $\int \dfrac{10\,dx}{\sqrt{9x^2+100}}$

11) $\int \dfrac{12\,dx}{\sqrt{400x^2-121}}$

12) $\int \sqrt{81-121x^2}\;dx$

13) $\int \dfrac{8\,dx}{1-x^2}$

14) $\int \dfrac{11\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$