VI

INTEGRALES DE LA FORMA

$$\int (mx+n)\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{k}{2}} dx \text{ , con } k = \pm\ 1, -2$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

Estas integrales difieren de las estudiadas en el capítulo anterior nada más en el binomio $mx + n$ que debe aparecer en el numerador con exponente 1. Ejemplos de integrales de esta forma son:

$$\int (2x-5)\sqrt{4x^2-x+6}\ dx$$

$$\int \frac{(5x+12)dx}{9x^2+18x-21}$$

$$\int \frac{(8x-1)dx}{\sqrt{16x^2+21x-1}}$$

La técnica para integrar estas funciones consiste en hacer primero el cambio de variable del trinomio cuadrático $u = ax^2 + bx + c$, a partir del cual se calcula la diferencial $du = (2ax + b)dx$. Como el polinomio $2ax + b$ de esta diferencial es de la misma forma que el binomio $mx + n$ del numerador de la integral original, a base de multiplicaciones y sumas, con sus respectivas operaciones inversas (divisiones y restas) para que no se altere, debe transformarse el binomio original $mx + n$

en el polinomio $2ax + b$ de la diferencial de u. Una vez logrado, la integral resultante se parte en dos integrales, las cuales ya se pueden realizar por alguno de los métodos ya estudiados hasta ahora.

En síntesis:

Para integrar funciones de la forma $\int (mx+n)(ax^2+bx+c)^{k/2}\,dx$, *en donde* $k = \pm 1, -2$:

a) *Hágase* $u = ax^2 + bx + c$.

b) *Obténgase la diferencial* $du = (2ax + b)\,dx$.

c) *Multiplíquese y divídase simultáneamente la integral original por* $\frac{2a}{m}$:

$$\frac{m}{2a}\int \frac{2a}{m}(mx+n)(ax^2+bx+c)^{k/2}\,dx =$$

$$= \frac{m}{2a}\int \left(2ax+\frac{2an}{m}\right)(ax^2+bx+c)^{k/2}\,dx$$

d) *Súmese y réstese* b *en el binomio:*

$$\frac{m}{2a}\int \left(2ax+b-b+\frac{2an}{m}\right)(ax^2+bx+c)^{k/2}\,dx$$

e) *Pártase en dos integrales:*

$$\frac{m}{2a}\int (2ax+b)(ax^2+bx+c)^{k/2}\,dx +$$

$$+\frac{m}{2a}\int \left(\frac{2an}{m}-b\right)(ax^2+bx+c)^{k/2}\,dx$$

Ejemplo 1: Integrar $\displaystyle\int \frac{(27x-8)\,dx}{81x^2+36x+8}$

Solución: Sea $u = 81x^2 + 36x + 8$, de donde
$du = (162x + 36)\,dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por 6, se obtiene como primer término $162x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$\frac{1}{6}\int \frac{6(27x-8)\,dx}{81x^2+36x+8} = \frac{1}{6}\int \frac{(162x-48)\,dx}{81x^2+36x+8}$$

Ahora debe sumarse (y restarse) $+36$ al mismo binomio (es el segundo término de du):

$$= \frac{1}{6}\int \frac{(162x+36-36-48)\,dx}{81x^2+36x+8}$$

Y dividiéndola en dos integrales en las que la primera debe tener como numerador el valor de la diferencial du , resulta:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{\overbrace{(162x+36)\,dx}^{du}}{81x^2+36x+8} + \frac{1}{6}\int \frac{(-36-48)\,dx}{81x^2+36x+8}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es u (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

$$= \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} - \frac{84}{6}\int \frac{dx}{81x^2+36x+8}$$

Como la 2ª integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior, se tiene que

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$= \frac{1}{6}\,ln\,u - 14\int \frac{dx}{(9x+2)^2+4}$$

$v^2 = (9x+2)^2$ de donde:

$v = 9x+2$

$dv = 9\,dx$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2+36x+8\right) - \frac{14}{9}\int \frac{9\,dx}{(9x+2)^2+4}$$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2+36x+8\right) - \frac{14}{9}\int \frac{du}{u^2+a^2}$$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2+36x+8\right) - \frac{14}{9}\left[\frac{1}{a}\,arc\;tan\frac{u}{a}\right] + c$$

$$= \frac{1}{6} ln\left(81x^2+36x+8\right) - \frac{14}{9}\left[\frac{1}{2}\,arc\;tan\frac{9x+2}{2}\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{(27x-8)\,dx}{81x^2+36x+8} = \frac{1}{6} ln\left(81x^2+36x+8\right) - \frac{7}{9}\,arc\;tan\frac{9x+2}{2} + c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

COMPROBACIÓN:

Para efectos de abreviar símbolos al momento de referirse a la derivada del resultado de la integral, hágase $I = \frac{1}{6}\,ln\left(81x^2+36x+8\right) - \frac{7}{9}\,arc\;tan\,\frac{9x+2}{2} + c$.

Entonces

$$\frac{dI}{dx}=\frac{1}{6}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(81x^2+36x+8\right)}{81x^2+36x+8}\right]-\frac{7}{9}\left[\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{9x+2}{2}\right)}{\left(\frac{9x+2}{2}\right)^2+1}\right]+0$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{162x+36}{81x^2+36x+8}\right]-\frac{7}{9}\left[\frac{\frac{9}{2}}{\frac{81x^2+36x+4}{4}+1}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{6\left(27x+6\right)}{81x^2+36x+8}\right]-\frac{7}{2}\left[\frac{1}{\frac{81x^2+36x+4+4}{4}}\right]$$

$$=\frac{27x+6}{81x^2+36x+8}-\frac{7}{2}\left[\frac{4}{81x^2+36x+8}\right]$$

$$=\frac{27x+6}{81x^2+36x+8}-\frac{14}{81x^2+36x+8}$$

$$\boxed{\frac{dI}{dx}=\frac{27x-8}{81x^2+36x+8}}$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

Ejemplo 2: Integrar $\displaystyle\int \frac{(5x-1)\,dx}{16x^2+40x+21}$

Solución: Sea $u = 16x^2 + 40x + 21$, de donde
$du = (32x + 40)dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por $\frac{32}{5}$, se obtiene como primer término $32x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$\frac{5}{32}\int \frac{\frac{32}{5}(5x-1)\,dx}{16x^2+40x+21} = \frac{5}{32}\int \frac{\left(32x-\frac{32}{5}\right)dx}{16x^2+40x+21}$$

Ahora debe sumarse y restarse $+40$ (ver du) al mismo binomio para obtener du:

$$= \frac{5}{32}\int \frac{\left(32x+40-40-\frac{32}{5}\right)dx}{16x^2+40x+21}$$

Y dividiéndola en dos integrales en las que la primera debe tener como numerador el valor de la diferencial du, resulta:

$$= \frac{5}{32}\int \frac{\overbrace{(32x+40)\,dx}^{du}}{16x^2+40x+21} + \frac{5}{32}\int \frac{\left(-40-\frac{32}{5}\right)dx}{16x^2+40x+21}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es u (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx/%7elcastro

$$= \frac{5}{32}\int \frac{du}{u} - \left(\frac{5}{32}\right)\left(-\frac{232}{5}\right)\int \frac{dx}{16x^2+40x+21}$$

$$= \frac{5}{32}\int \frac{du}{u} - \frac{29}{4}\int \frac{dx}{16x^2+40x+21}$$

La segunda integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior; la primera ya es de fórmula, de modo que

$$= \frac{5}{32}\ln u - \frac{29}{4}\int \frac{dx}{(4x+5)^2-4}$$

$v^2 = (4x+5)^2$ de donde:

$v = 4x + 5$

$dv = 4\,dx$

$a^2 = 4$

$a = 2$

$$= \frac{5}{32}\ln u - \frac{29}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\int \frac{4\,dx}{(4x+5)^2-4}$$

$$= \frac{5}{32}\ln\left(16x^2+40x+21\right) - \frac{29}{16}\int \frac{du}{u^2-a^2}$$

$$= \frac{5}{32}\ln\left(16x^2+40x+21\right) - \frac{29}{16}\left[\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right] + c$$

$$= \frac{5}{32}\ln\left(16x^2+40x+21\right) - \frac{29}{16}\left[\frac{1}{2(2)}\ln\left(\frac{4x+5-2}{4x+5+2}\right)\right] + c$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$\boxed{\int \frac{(5x-1)\,dx}{16x^2+40x+21}=\frac{5}{32}ln\left(16x^2+40x+21\right)-\frac{29}{64}ln\left(\frac{4x+3}{4x+7}\right)+c}$$

Ejemplo 3: Integrar $\int \frac{(7x-6)\,dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$

Solución: Sea $u = 3 - 6x - 9x^2$, de donde
$du = (-18x - 6)dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por $-\frac{18}{7}$, se obtiene como primer término $-18x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$-\frac{7}{18}\int \frac{-\frac{18}{7}(7x-6)\,dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}=-\frac{7}{18}\int \frac{\left(-18x+\frac{108}{7}\right)dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

Ahora debe restarse (y sumarse) 6 al mismo binomio para obtener du:

$$=-\frac{7}{18}\int \frac{\left(-18x-6+6+\frac{108}{7}\right)dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

Y dividiéndola en dos integrales, resulta:

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$= -\frac{7}{18}\int \frac{\overbrace{(-18x-6)\,dx}^{du}}{\sqrt{\underbrace{3-6x-9x^2}_{u}}} - \frac{7}{18}\int \frac{\left(6+\frac{108}{7}\right)dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es $\sqrt{u}$ (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

$$= -\frac{7}{18}\int \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{7}{18}\left(\frac{150}{7}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}}$$

La segunda integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior:

$$= -\frac{7}{18}\int u^{-\frac{1}{2}}du - \frac{25}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{4-(3x+1)^2}}$$

$v^2 = (3x+1)^2$ de donde:
$v = 3x+1$
$dv = 3\,dx$
$a^2 = 4$
$a = 2$

$$= -\frac{7}{18}\left[\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right] - \frac{25}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\int \frac{3\,dx}{\sqrt{4-(3x+1)^2}}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$= -\frac{7}{18}\left[\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] - \frac{25}{9}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}$$

$$= -\frac{7}{18}\left[2u^{1/2}\right] - \frac{25}{9}\left[arc\ sen\,\frac{v}{a}\right] + c$$

$$\boxed{\int \frac{(7x-6)\,dx}{\sqrt{3-6x-9x^2}} = -\frac{7}{9}\sqrt{3-6x-9x^2} - \frac{25}{9}\,arc\ sen\,\frac{3x+1}{2} + c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

Ejemplo 4: Integrar $\int \frac{(11x+2)\,dx}{5x^2+6x-39}$

Solución: Sea $u = 5x^2 + 6x - 39$, de donde
$du = (10x + 6)dx$

Si el binomio del numerador de la integral original se multiplica (y se divide) por $\frac{10}{11}$, se obtiene como primer término $10x$, que es el primer término de la diferencial du. Haciéndolo:

$$\frac{11}{10}\int \frac{\frac{10}{11}(11x+2)\,dx}{5x^2+6x-39} = \frac{11}{10}\int \frac{\left(10x + \frac{20}{11}\right)dx}{5x^2+6x-39}$$

Ahora debe sumarse (y restarse) 6 al mismo binomio para obtener du:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{\left(\overbrace{10x+6}\overbrace{-6+\frac{20}{11}}\right)dx}{5x^2+6x-39}$$

Y dividiéndola en dos integrales, resulta:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{\overbrace{(10x+6)\,dx}^{du}}{\underbrace{5x^2+6x-39}_{u}} + \frac{11}{10}\int \frac{\left(-6+\frac{20}{11}\right)dx}{5x^2+6x-39}$$

$$= \frac{11}{10}\int \frac{(10x+6)\,dx}{5x^2+6x-39} + \frac{11}{10}\int \frac{-\frac{46}{11}\,dx}{5x^2+6x-39}$$

En esta primera integral, el numerador es du y el denominador es u (ver el cambio de variable con el que se inicio este procedimiento). En la segunda integral, se pueden sumar las constantes del numerador y escribirse afuera de la integral:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{du}{u} - \frac{23}{5}\int \frac{dx}{5x^2+6x-39}$$

La segunda integral es de la forma estudiada en el capítulo anterior:

$$= \frac{11}{10}\int \frac{du}{u} - \frac{23}{5}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}\,x+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{204}{5}}$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$v^2 = \left(\sqrt{5}\,x + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 \quad \text{de donde:}$$

$$v = \sqrt{5}\,x + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$dv = \sqrt{5}\,dx$$

$$a^2 = \frac{204}{5}$$

$$a = \sqrt{\frac{204}{5}}$$

$$= \frac{11}{10} ln\,u \; - \frac{23}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\int \frac{\sqrt{5}\,dx}{\left(\sqrt{5}\,x + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{204}{5}}$$

$$= \frac{11}{10} ln\left(5x^2 + 6x - 39\right) - \frac{23}{5\sqrt{5}}\int \frac{du}{u^2 - a^2}$$

$$= \frac{11}{10} ln\left(5x^2 + 6x - 39\right) - \frac{23}{5\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2a} ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right] + c$$

$$= \frac{11}{10} ln\left(5x^2 + 6x - 39\right) - \frac{23}{5\sqrt{5}}\left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{204}{5}}} ln\left(\frac{\sqrt{5}\,x + \frac{3}{\sqrt{5}} - \sqrt{\frac{204}{5}}}{\sqrt{5}\,x + \frac{3}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{204}{5}}}\right)\right] + c$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

$$=\frac{11}{10}ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{5\sqrt{5}}\left[\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{204}}ln\frac{\sqrt{5}\,x+\dfrac{3}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}\,x+\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}}\right]+c$$

Para eliminar el denominador parcial $\sqrt{5}$ que aparece en el numerador y denominador del argumento del logaritmo natural de la segunda integral, basta multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{5}$:

$$=\frac{11}{10}ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{10\sqrt{204}}\;ln\;\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}\,x+\dfrac{3}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}\,x+\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{204}}{\sqrt{5}}\right)}+c$$

$$\boxed{\int\frac{(11x+2)\,dx}{5x^2+6x-39}=\frac{11}{10}ln\left(5x^2+6x-39\right)-\frac{23}{10\sqrt{204}}ln\left(\frac{5x+3-\sqrt{204}}{5x+3+\sqrt{204}}\right)+c}$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

EJERCICIO 6.1

Realizar las siguientes integrales:

1) $\displaystyle\int \frac{(2x-7)\,dx}{81x^2+36x+5}$

2) $\displaystyle\int \frac{(4x-11)\,dx}{23+44x-4x^2}$

3) $\displaystyle\int \frac{(2x+17)\,dx}{4x^2-28x+33}$

4) $\displaystyle\int \frac{(7x-2)\,dx}{9x^2+60x+125}$

5) $\displaystyle\int \frac{(9x-1)\,dx}{16x^2-56x-15}$

6) $\displaystyle\int \frac{(13x+11)\,dx}{45-12x-x^2}$

7) $\displaystyle\int \frac{(17x+13)\,dx}{\sqrt{25x^2-10x+2}}$

8) $\displaystyle\int \frac{(6x+13)\,dx}{\sqrt{36x^2+60x-75}}$

9) $\displaystyle\int \frac{(9x-7)\,dx}{\sqrt{35+12x-36x^2}}$

10) $\displaystyle\int (x-9)\sqrt{9x^2-7x}\,dx$

11) $\displaystyle\int \frac{(x+6)\,dx}{\sqrt{25x^2-11x+5}}$

12) $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{6x^2-24x-5}$

13) $\displaystyle\int \frac{(7x+9)\,dx}{\sqrt{2x^2+3x-13}}$

14) $\displaystyle\int 6x\sqrt{10+10x-13x^2}\,dx$

15) $\displaystyle\int \frac{(5-2x)\,dx}{8x^2+7x-6}$

16) $\displaystyle\int \frac{(2-3x)\,dx}{\sqrt{5-x-x^2}}$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro