GEOMETRÍA ANALÍTICA

3 CONCEPTOS PRELIMINARES

3.1 GRÁFICAS Y TABULACIONES

En Matemáticas, para toda operación existe su inversa, la cual permite "ir en sentido contrario", o sea "permite regresar" a los valores originales.

La figura 3.1 es un recordatorio gráfico de algunas operaciones que llevan a otro número y su inversa que "permite regresar" a los valores originales. Por ejemplo, si el origen es el número 30, o lo que es lo mismo, inicialmente se tiene el número 30, con la operación *seno* se "traslada" al número 0.5; para regresar del 0.5 al 30 original existe el camino de regreso, llamada operación inversa, *arco seno de* 0.5 con el que se cae nuevamente al 30 original.

figura 3.1

De la misma forma, si el origen es, por ejemplo, el número 7, o lo que es lo mismo, inicialmente se tiene el número 7, con la operación "al cuadrado" se "traslada" al número 49. Para regresar del 49 al 7 existe el camino de regreso, llamada operación inversa, *raíz cuadrada de* 49 con el que se cae nuevamente al número 7 original.

Un proceso matemático conocido es el de graficar una ecuación, visto en el capítulo anterior. O sea, dada la ecuación encontrar su gráfica. Por ejemplo, graficar la ecuación $y = 3x - 9$. Los pasos a seguir son:

1) *Tabular:* Se dan valores arbitrarios a la *equis* y se calcula el correspondiente de *ye*. En una tabla se van colocando los valores.

2) *Graficar:* Cada punto tabulado se localiza en el plano cartesiano. Se unen los puntos para obtener la gráfica correspondiente.

PROBLEMA DIRECTO

Dada la ecuación,

$y = 3x - 9$

tabulando

x	0	2	4
y	- 9	- 3	3

se llega a la gráfica

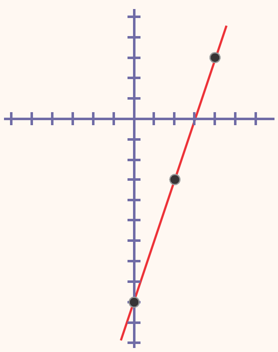


figura 3.2

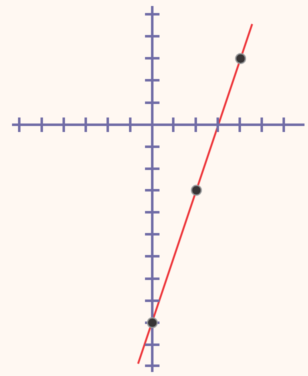
El problema directo es: conocida la ecuación, llegar a la gráfica que le corresponde (tabulando), como lo muestra la figura 3.2.

El problema inverso es: conocida la gráfica llegar a la ecuación que le corresponde. Ver figura 3.3. En esto último consiste la parte principal de lo que se ocupa la *Geometría Analítica*, con algunas limitaciones especiales que más adelante se detallarán.

Es decir, la geometría analítica investiga las ecuaciones que pertenecen a ciertas gráficas, no a todas. Estas gráficas son las que corresponden a las secciones que se pueden obtener al cortar uno o dos conos con un plano en diferentes posiciones. De allí que a tales figuras se les llame ***cónicas***.

PROBLEMA INVERSO:

Dada la gráfica



llegar a la ecuación

$y = 3x - 9$

figura 3.3

Se entiende por sección a la figura que resultaría si se cortara un objeto tridimensional por medio de un plano. Es la figura de la parte donde se cortó.

Las cónicas son:

- *la recta* (corte tangencial).
- *la circunferencia*: Si al cono se le hace un corte con un plano horizontal o paralelo a la base, la sección que se obtiene es una circunferencia, como está mostrado en la figura 3.4.

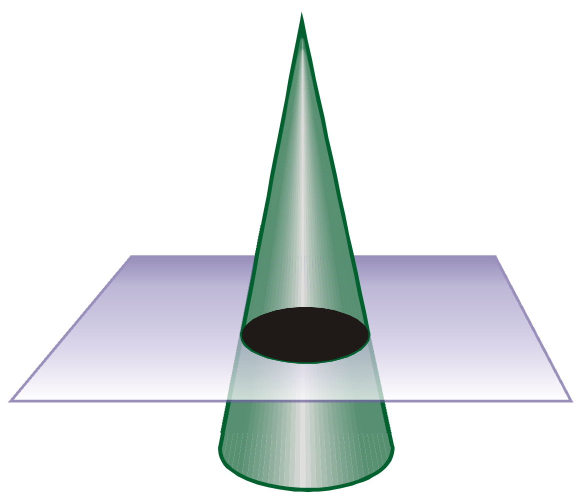


figura 3.4

✳ *la elipse*: Si al cono se le hace un corte con un plano oblicuo a la base sin que toque o corte a dicha base, la sección que se obtiene es una elipse, como está mostrado en la figura 3.5.

✳ *la parábola*: Si al cono se le hace un corte oblicuo de manera que sea paralelo a uno de los lados, necesariamente cortando a la base, la sección que se obtiene es una parábola. Verlo en la figura 3.6.

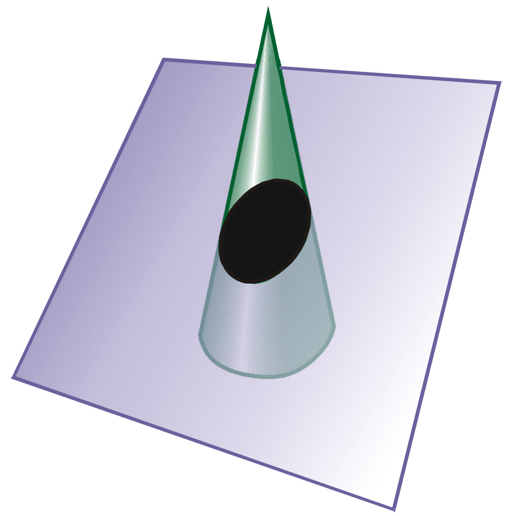


figura 3.5

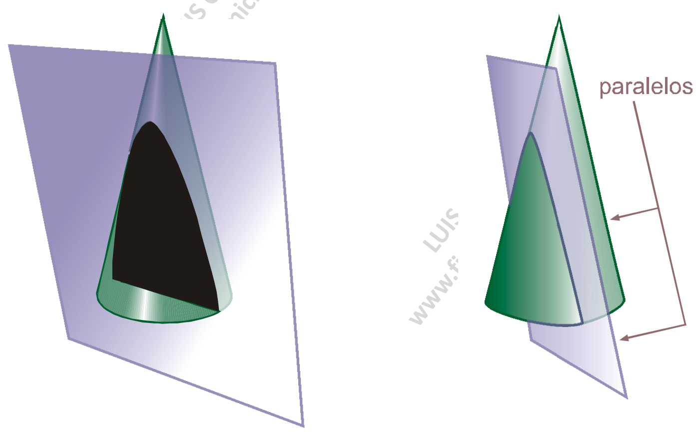


figura 3.6

✳ *la hipérbola*: Si se colocan dos conos simétricamente de manera que sus vértices queden apenas en contacto, si a dichos conos se les hace un corte vertical la sección que se obtiene es una hipérbola. Verlo en la figura 3.7.

Así, pues, debe entenderse que al estudiar geometría analítica lo que se hace en realidad es investigar las características de cada una de las cónicas para, a partir de ellas, llegar a la ecuación que le corresponde, es decir, aquella que al tabularla y graficarla coincida con la gráfica original. Inclusive, los problemas de geometría analítica no solamente se refieren a encontrar la ecuación de una cierta cónica, sino a veces a alguna de sus propiedades.

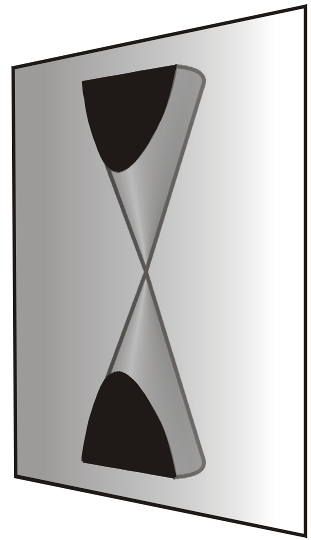


figura 3.7

Las cónicas tienen dos cosas en común:

1) *Las cinco se derivan de los cortes a uno o dos conos.*

2) *A partir de una misma ecuación, se pueden obtener las cinco cónicas, dependiendo nada más del valor de los coeficientes.*

Por eso a dicha ecuación se le llama ecuación general de las cónicas.

La *ecuación general* de las cónicas es

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0} \qquad (3.1)$$

Si se grafica la ecuación general de las cónicas anterior (3.1), dependiendo de los valores que se les den a los coeficientes A, B, C, D, E y F, la gráfica que se obtiene solamente puede ser una recta, o una circunferencia, o una parábola, o una elipse o una hipérbola. Ninguna otra cosa. Por eso a dicha ecuación se le llama *ecuación general de las cónicas*. Existen sus excepciones que ya se verán en su momento.

Puede verse que las características de esta ecuación son:

* Existen solamente dos variables: La x y la *ye*.
* Ambas aparecen al cuadrado, independientemente una de la otra.
* Después aparecen en forma lineal, es decir, con exponente 1, independientemente una de la otra. Se llaman términos lineales.
* Finalmente aparece un "numerito" solo, sin la x y sin la *ye*, llamado término independiente.

3.2 ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN GENERAL

El análisis de *la ecuación general de las cónicas* consiste en investigar los valores que deben darse a los coeficientes A, B, C, D, E y F para que la gráfica que se obtenga de ella sea una recta; o bien una circunferencia; o bien una parábola, etc.

El análisis principal se realiza respecto de los términos al cuadrado, o dicho en terminología sencilla, de "los cuadrados" (de los términos Ax^2 y/o By^2), de lo cual hay solamente tres posibilidades:

Posibilidad 1: Que no exista ninguno de los dos "cuadrados", o sea que $A = B = 0$. En este caso lo que se obtiene es *una recta*. Por ejemplo, $3x + 5y - 9 = 0$.

Posibilidad 2: Que exista solamente uno de los dos "cuadrados". Entonces hay a su vez dos opciones: que exista x^2 o que exista y^2. O sea

Que $A = 0$ (para garantizar la no existencia del cuadrado x^2)

$B \neq 0$ (para garantizar la existencia del otro cuadrado y^2)

$D \neq 0$ (para garantizar la existencia de la variable x).

o que $B = 0$ (para garantizar la no existencia del cuadrado y^2)

$A \neq 0$ (para garantizar la existencia del otro cuadrado x^2)

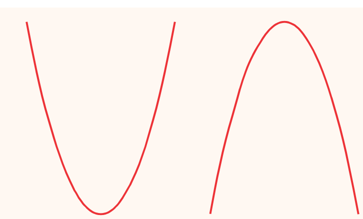
$E \neq 0$ (para garantizar la existencia de la variable ye).

En este caso, la gráfica correspondiente es *una parábola*, la cual abre hacia el eje del término lineal que carece de su cuadrado.

Ejemplo 1:

$$7x^2 - 3x + 5y = 0$$

El término lineal que carece de cuadrado es $+5y$; por lo tanto, la parábola abre sobre el eje de las *ye*. Como no se tiene mayor información, debe tener la forma de alguna de las dos parábolas mostradas en la figura 3.8.



Parábolas que abren hacia el eje y[e]

figura 3.8

Ejemplo 2:

$$6y^2 + 2x + 9y = 0$$

El término lineal que carece de cuadrado es $+2x$; por lo tanto, la parábola abre sobre el eje de las x. Como no se tiene mayor información, debe tener la forma de alguna de las dos parábolas mostradas en la figura 3.9.

figura 3.9

En estos dos ejemplos nada se ha mencionado de la ubicación de los ejes, ya que el análisis de la ecuación no proporciona información para saber en dónde quedan éstos.

Posibilidad 3: Que existan los dos "cuadrados". Entonces hay a su vez tres opciones:

a) que los coeficientes de los "dos cuadrados" sean iguales, por lo tanto con el mismo signo también, es decir, que $A = B$. Se trata entonces de *una circunferencia*. Por ejemplo,

$$3x^2 + 3y^2 - 5x - 25 = 0$$

b) que los coeficientes de los "dos cuadrados" sean diferentes, pero con el mismo signo, es decir que $A \neq B < 0$ (los dos negativos) o que $A \neq B > 0$ (ambos positivos). Se trata entonces de *una elipse*. Por ejemplo,

$$3x^2 + 5y^2 - 6x - 20y - 25 = 0$$

$$-2x^2 - 7y^2 + x + 11y + 25 = 0$$

ambas son elipses.

c) que los coeficientes de los "dos cuadrados" sean de signos contrarios, es decir que $A > 0$ (positivo) y $B < 0$ (negativo), o bien que $A < 0$ (negativo) y $B > 0$ (positivo). Se trata entonces de *una hipérbola*. Por ejemplo,

$$4x^2 - 3y^2 - 9x - 11y + 7 = 0$$

$$-3x^2 + 11y^2 + 8x - 9y - 1 = 0$$

En todos los casos existen excepciones que ya mencionarán cuando se estudien cada una de ellas.

En síntesis: A partir de la ecuación general de las cónicas $\underbrace{Ax^2 + By^2} + Dx + Ey + F = 0$ la existencia o no de los términos cuadráticos, o "los cuadrados", definen el tipo de cónica que es.

$$\text{Cuadrados}\begin{cases}\text{Ningún cuadrado: es recta.}\\ \text{Un solo cuadrado: es parábola.}\\ \text{Dos cuadrados}\begin{cases}\text{Iguales signos, iguales coeficientes: es circunferencia.}\\ \text{Iguales signos, diferentes coeficientes: es elipse.}\\ \text{Diferentes signos: es hipérbola.}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos:

ecuación:	*análisis:*
$3x^2 - 4y^2 - 5x - 20y - 25 = 0$	Como existen los dos "cuadrados" con signos contrarios, se trata de *una hipérbola*.
$5x^2 + 4y^2 - 5x - 25 = 0$	Como existen los dos "cuadrados" con signos iguales, pero diferentes los coeficientes, se trata de *una elipse*.
$8x^2 - 5x + 9y - 25 = 0$	Como existe un solo cuadrado ($8x^2$), se trata de *una parábola*.
$5x + 9y - 5 = 0$	Como no existe ninguno de los dos "cuadrados", se trata de *una recta*.
$-9x^2 - 9y^2 + 5y + 25 = 0$	Como existen los dos "cuadrados" iguales y con el mismo signo, se trata de *una circunferencia*.

$$4x^2 - y^3 + 7x + y + 2 = 0$$

La gráfica de esta ecuación NO pertenece a ninguna cónica porque tiene un término al cubo y se sale de la forma de la ecuación general de las cónicas vista en la página 23.

$$9x^2 + 4xy^2 - 5x^2y + 8y - 13 = 0$$

La gráfica de esta ecuación NO pertenece a ninguna cónica porque tiene dos términos que no pertenecen a la forma de la ecuación general de las cónicas vista en la página 23. Esos dos términos son el segundo y tercero.

EJERCICIO 3.1

Analizar cada una de las siguientes ecuaciones e identificar cuáles pertenecen a la forma general de las cónicas y cuáles no. Para aquellas que sí lo sean, mencionar el tipo de gráfica que le corresponde, o sea qué cónica es.

1) $3x^2 + 5y^2 - 9x - 11y - 14 = 0$

2) $4x^2 - 5y^2 - x + 16y - 1 = 0$

3) $7x^2 + 7y^2 - 3x - 12y - 10 = 0$

4) $4x^2 - x + 16y - 41 = 0$

5) $x^3 + 25y^2 - 8x - 13y + 4 = 0$

6) $5y^2 - x + 16y - 1 = 0$

7) $x^2 + y^2 - 10 = 0$

8) $4x^3 - x^2 + 16y - 34 = 0$

9) $3x^2 - 3y^2 + 2x + 14y + 24 = 0$

10) $-x + 6y - 21 = 0$

11) $5y^2 - 3x - 12y + 10 = 0$

12) $4x^2 + 16y - 41 = 0$

13) $-7x^2 - 7y^2 - 13y + 4 = 0$

14) $-67x + 16y - 1 = 0$

15) $5x^2 + y^2 - 10 = 0$

16) $4x^2 - y^2 + 2x - 3x^2y + 1 = 0$

17) $-7y^2 + x - 13y + 4 = 0$

18) $7x^2y^2 + 16y + 1 = 0$

19) $6x^2 + 5y^2 - 100 = 0$

20) $44x^2 - 8y^2 + 16y - 34 = 0$

21) $3x - y + 1 = 0$

22) $x^2 - 16y - 41 = 0$

23) $-8x^2 + 8y^2 - 13y + 4 = 0$

24) $6x - 13y = 0$

25) $5xy^2 + x^2y + 19x = 0$

26) $8x^2 + 8y^2 + 16y = 0$

27) $x^2 + 17y^2 + 10x = 0$

28) $4x^3 + x^2 + y^2 + 35y = 0$

29) $3x^2 + 2x + 14y = 0$

30) $-34x + 26y = 0$

3.3 ECUACIÓN GENERAL Y ECUACIÓN PARTICULAR

Como ya se dijo, la ecuación $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la que rige de manera general a todas las cónicas. Sin embargo, de esta *ecuación general* la información que se obtiene es muy limitada, pues sólo se puede llegar a conocer a partir de ella, de qué figura se trata y si está o no desplazada, y en el caso de la parábola, hacia dónde abre. Pero esto no es suficiente; es necesario saber también cuánto se desplazó y hacia dónde, con toda exactitud. Además, en cada caso particular, deben ser conocidas todas las características de cada figura para tener la información completa. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia, debe conocerse la posición del centro y del valor del radio para ubicar perfectamente a dicha figura. Y eso no se obtiene de *la ecuación general*.

Entonces, como cada figura en particular posee sus propias características, cada una de ellas tiene también una ecuación propia que proporciona toda la información sobre ella. Por esa razón, a esa ecuación se le llama *ecuación particular* o *ecuación en forma particular*. De tal manera que se hace necesario estudiar independiente a cada una de las cónicas.

A esta ecuación particular la mayoría de los autores suelen llamarla *forma ordinaria* en los libros de Geometría Analítica o *forma estándar*. Sin embargo, como en el presente texto se ha tomado el criterio de evitar la terminología complicada que acaba, a veces, por confundir al alumno, se ha sustituido por una palabra más representativa, empleando un lenguaje más accesible. De hecho, la palabra "particular" desde el punto de vista semántico (relativo al significado de las palabras) encaja mejor en la idea que define.