8 LA HIPÉRBOLA

8.1 DEFINICIONES

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos , es constante e igual a $2a$.

La simbología que se utiliza para representar las partes fundamentales de la hipérbola es la siguiente:

* La letra a representa la distancia que hay desde el centro hasta cada extremo central de cada rama de la hipérbola. Ver la figura 8.1.

* La letra b representa una distancia imaginaria, la cual está regida por la relación de las constantes a, b y c, que un poco más adelante se definirá.

* La letra c representa la distancia que hay desde el centro hasta cada foco.

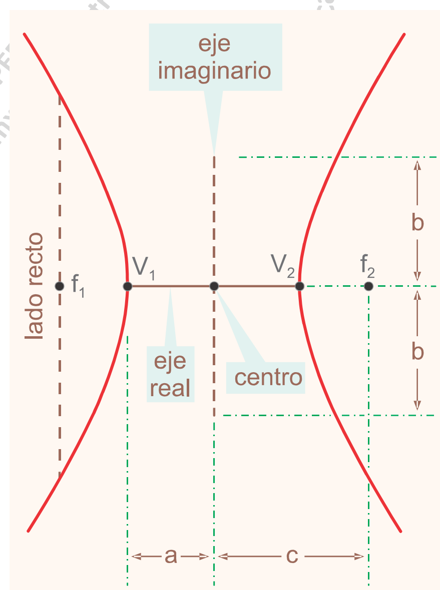

figura 8.1

Las características de una hipérbola, mostradas en la figura 8.1, son las siguientes:

* La distancia de su centro a los focos, llamada c (minúscula).

* La distancia de su centro a los vértices, llamada a.

* *Eje real*: Es la distancia de un vértice hasta el otro.

* *Distancia focal*: Es la distancia de un foco hasta el otro.

* *Eje imaginario* : Es la distancia $2b$. El valor de b sale de una relación pitagórica entre las cons-

tantes a y c, dada más adelante.

* La posición del centro dada, como en todas las cónicas anteriores que poseen al menos un término al cuadrado, por (h, k).

* *Lado recto*: Es la cuerda perpendicular al eje real y que pasa por lo focos.

* *Eje focal*: Es el eje por donde pasan los dos focos y los dos vértices.

Hay dos posibilidades de obtener una hipérbola: horizontal o vertical.

Todas esas características están dadas en la ecuación particular de la hipérbola, que de hecho son dos, según se trate de una hipérbola horizontal o de una hipérbola vertical.

Podrá verse que hay varios aspectos que son muy semejantes a la elipse, inclusive en la ecuación particular existen muchas similitudes.

Existe una relación entre las tres constantes a, b y c, que por el teorema de Pitágoras está dada por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

de donde, despejando cada literal, se obtiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

A partir de las coordenadas del centro $(h, k,)$, de la longitud del semieje real a y de la longitud del semieje imaginario b se pueden obtener o deducir todas las características anteriores, las cuales están dadas en la ecuación particular de la hipérbola, que de hecho son dos, según se trate de una hipérbola horizontal o de una hipérbola vertical.

Para saber si se trata de una hipérbola horizontal o vertical, basta observar las dos fracciones de la ecuación particular, las cuales una debe ser positiva y la otra negativa. La que queda positiva indica la variable sobre la que está el eje focal.

La ecuación particular de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{si el eje focal es horizontal}$$

o bien

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{si el eje focal es vertical}$$

Igual que en las anteriores cónicas que tienen términos al cuadrado, h significa el desplazamiento horizontal del centro y k el desplazamiento vertical del centro. El significado de las letras a y b de los denominadores están definidos en la figura 8.1.

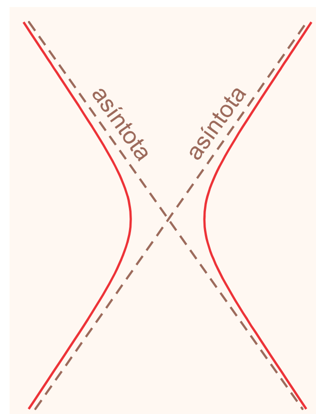

figura 8.2

La hipérbola tiene asociadas dos líneas rectas a las cuales parece irse pegando más y más la curva, sin llegar jamás a cruzarse. A esas rectas, mostradas en la figura 8.2, se les llama *asíntotas*.

En general, se le da el nombre de *asíntota*[1] a toda línea recta que, al prolongarse continuamente la curva se acerca a dicha recta sin llegar jamás a encontrarla.

Las *asíntotas* tienen por ecuaciones:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$$ si el eje real es paralelo al eje x.

Obsérvese que la pendiente es $m = \frac{b}{a}$

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$$ si el eje real es paralelo al eje ye. Obsérvese que la pendiente es

$$m = \frac{a}{b}$$

---

[1] *Asíntota* viene del griego *asumptutoz*, que significa "que no coincide".

Otra característica interesante de la hipérbola es la longitud de su lado recto, el cual mide, igual que en la elipse,

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

en donde las letras a y b que aparecen, son las mismas definidas anteriormente.

8.2 TRANSFORMACIONES

Dar, por medio de una regla, como se hizo en el caso de la circunferencia y de la parábola, el procedimiento para transformar de la ecuación general a la particular, en el caso de la hipérbola resulta muy extenso; de manera que, por esa razón, se va a mostrar dicho proceso a través de un ejemplo.

Ejemplo 1: La ecuación general de una hipérbola es $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$. Transformarla a su ecuación particular.

Solución: Para tratar de dar claridad a la explicación, se hará por pasos la transformación pedida.

PASO 1: *Se agrupan en el lado izquierdo los términos que contengan a las misma variables y se escribe en el lado derecho la constante sola:*

$$\left(4x^2 - 16x\right) - \left(9y^2 + 18y\right) = 29$$

PASO 2: *Se factoriza en cada grupo el coeficiente del término al cuadrado:*

$$4\left(x^2 - 4x\right) - 9\left(y^2 + 2y\right) = 29$$

PASO 3: *Se completa un trinomio cuadrado perfecto en cada grupo, añadiendo al lado derecho la misma cantidad agregada en el izquierdo:*

$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) - 9\left(y^2 + 2y + 1\right) = 29 + 16 - 9$$

$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) - 9\left(y^2 + 2y + 1\right) = 36$$

NOTA: Se agregó 16 en el lado derecho porque es el 4 que se agregó adentro del primer paréntesis, el cual está multiplicado todo por 4; de la misma forma, en el segundo paréntesis se agregó adentro un 1, pero como está multiplicado por -9, en realidad fue -9 que en total da 16 lo que se agregó.

PASO 4: *Se factorizan los dos paréntesis:*

$$4(x-2)^2 - 9(y+1)^2 = 36$$

PASO 5: *Se dividen ambos lados de la igualdad entre* 36 (*para obtener del lado derecho igual a* 1 *como está en la ecuación particular*) *y se simplifica:*

$$\frac{4(x-2)^2}{36} - \frac{9(y+1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1}$$

donde $a^2 = 9$ (por ser el primer denominador) y $b^2 = 4$ (por ser el segundo denominador); por lo tanto, se trata de una hipérbola horizontal, ya que la fracción positiva contiene a la variable x.

De esta ecuación se obtienen los valores de: $h = 2$; $k = -1$; $a = 3$; $b = 2$. Y por la relación de las constantes a, b y c, se obtiene que

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{9+4}$$
$$c \approx 3.6$$

Es decir, se trata de una hipérbola cuyo centro está en $O(2, -1)$, como lo muestra la figura 8.3 de la página siguiente.

Si $a = 3$ es la distancia del centro a los vértices, las coordenadas de los vértices se obtienen contando tres unidades a la izquierda y tres a la derecha a partir del centro:

$$V_1(2-3, -1) = V_1(-1, -1)$$
$$V_2(2+3, -1) = V_2(5, -1)$$

La longitud del eje real es igual a $2a = 2(3) = 6$; la del eje imaginario es $2b = 4$.

Si $c \approx 3.6$ es la distancia del centro a los focos, las coordenadas de los focos se obtienen contando 3.6 unidades a la izquierda y 3.6 a la derecha a partir del centro:

$$f_1(2-3.6\,;\,-1) = f_1(-1.6\,;\,-1)$$
$$f_2(2+3.6\,;\,-1) = f_2(5.6\,;\,-1)$$

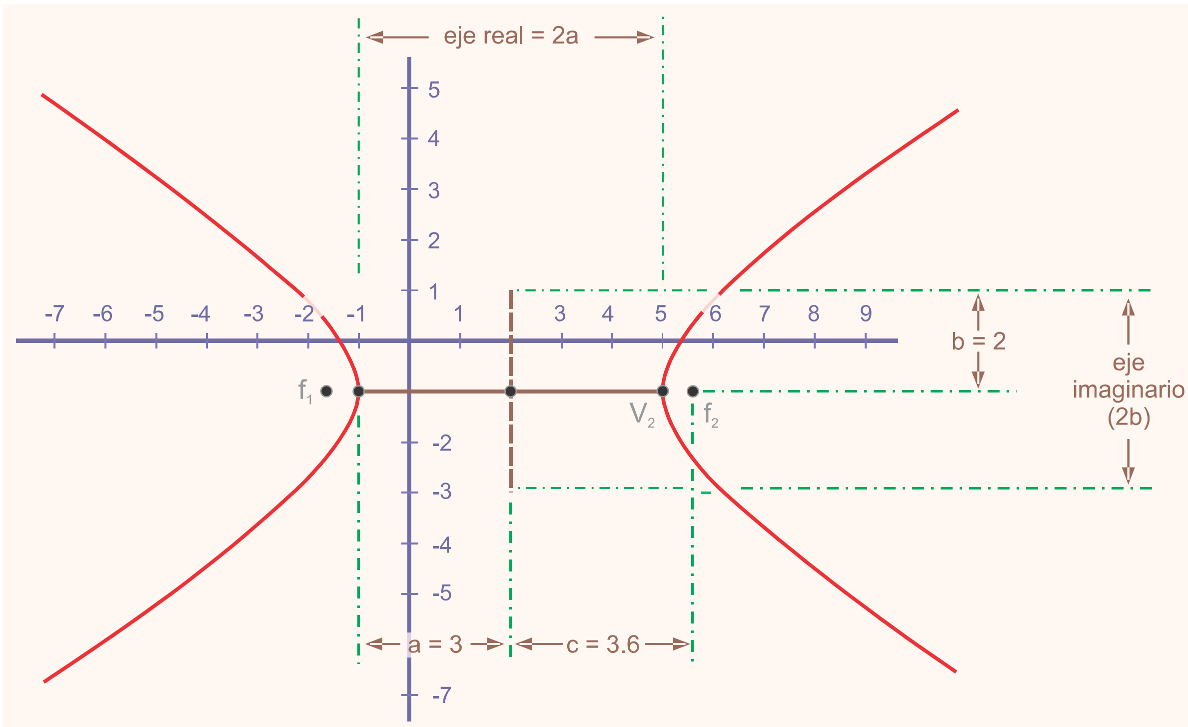

figura 8.3

Ejemplo 2: Transformar a su ecuación general la siguiente ecuación particular de una hipérbola:

$$\frac{(x+4)^2}{49} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Solución: Para eliminar los denominadores, debe multiplicarse toda la igualdad por el producto de los dos denominadores, es decir, por 196. Haciéndolo, se obtiene:

$$196\left(\frac{(x+4)^2}{49}\right) - 196\left(\frac{(y-2)^2}{4}\right) = 196(1)$$

$$4(x+4)^2 - 49(y-2)^2 = 196$$

elevando al cuadrado los binomios indicados:

$$4\left(x^2+8x+16\right) - 49\left(y^2-4y+4\right) = 196$$

haciendo las multiplicaciones indicadas:

$$4x^2 + 32x + 64 - 49y^2 + 196y - 196 = 196$$

finalmente, escribiendo todo en el lazo izquierdo, reduciendo términos semejantes y ordenando conforme a la forma de la ecuación general, se llega a:

$$4x^2 + 32x + 64 - 49y^2 + 196y - 196 - 196 = 0$$

$$\boxed{4x^2 - 49y^2 + 32x + 196y - 328 = 0}$$

Ejemplo 3: Hallar las coordenadas de los vértices y los focos, las ecuaciones de sus asíntotas, así como la longitud de sus ejes real e imaginario de la siguiente hipérbola. Esbozar su gráfica.

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$$

Solución: La fracción positiva contiene a la variable *ye*, lo que significa que el eje focal es paralelo al eje *ye*. Por los denominadores, se tiene que

$$a^2 = 9\,,$$
$$b^2 = 25$$

de donde

$$a = 3$$
$$b = 5$$

por lo tanto

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{9 + 25} \approx 5.83$$

además

$$h = -2 \quad ;$$
$$k = 1$$

Si las coordenadas del centro son $O(-2, 1)$, sumándole y restándole a su ordenada (porque se trata de una hipérbola vertical) el valor de $c = 5.83$, se obtienen las coordenadas de los focos, o sea

$$\mathrm{f}_1\left(-2\,;1+5.83\right)=\mathrm{f}_1\left(-2\,;6.83\right)$$
$$\mathrm{f}_2\left(-2\,;1-5.83\right)=\mathrm{f}_1\left(-2\,;-4.83\right)$$

De la misma forma, si las coordenadas del centro son $O\left(-2,\,1\right)$, sumándole y restándole a su ordenada (porque se trata de una hipérbola vertical) el valor de $a=3$, se obtienen las coordenadas de los vértices, o sea

$$\mathrm{V}_1\left(-2\,;1+3\right)=\mathrm{V}_1\left(-2,\,4\right)$$
$$\mathrm{V}_2\left(-2\,;1-3\right)=\mathrm{V}_2\left(-2,\,-2\right)$$

La longitud del eje real es $2a=2(3)=6$; mientras que la longitud del eje imaginario es $2b=2\left(5\right)=10$.

Las ecuaciones de sus asíntotas se calculan con $y-k=\pm\dfrac{a}{b}\left(x-h\right)$ por ser el eje real es paralelo al eje *ye*.

Para la primera asíntota se tiene que

$$y-1=\frac{3}{5}\left(x+2\right)$$
$$5\left(y-1\right)=3\left(x+2\right)$$
$$5y-5=3x+6$$

$$\boxed{3x-5y+11=0}$$

Para la segunda asíntota se tiene que

$$y-1=-\frac{3}{5}\left(x+2\right)$$
$$5\left(y-1\right)=-3\left(x+2\right)$$
$$5y-5=-3x-6$$

$$\boxed{3x+5y+1=0}$$

La gráfica correspondiente se muestra en la figura 8.4:

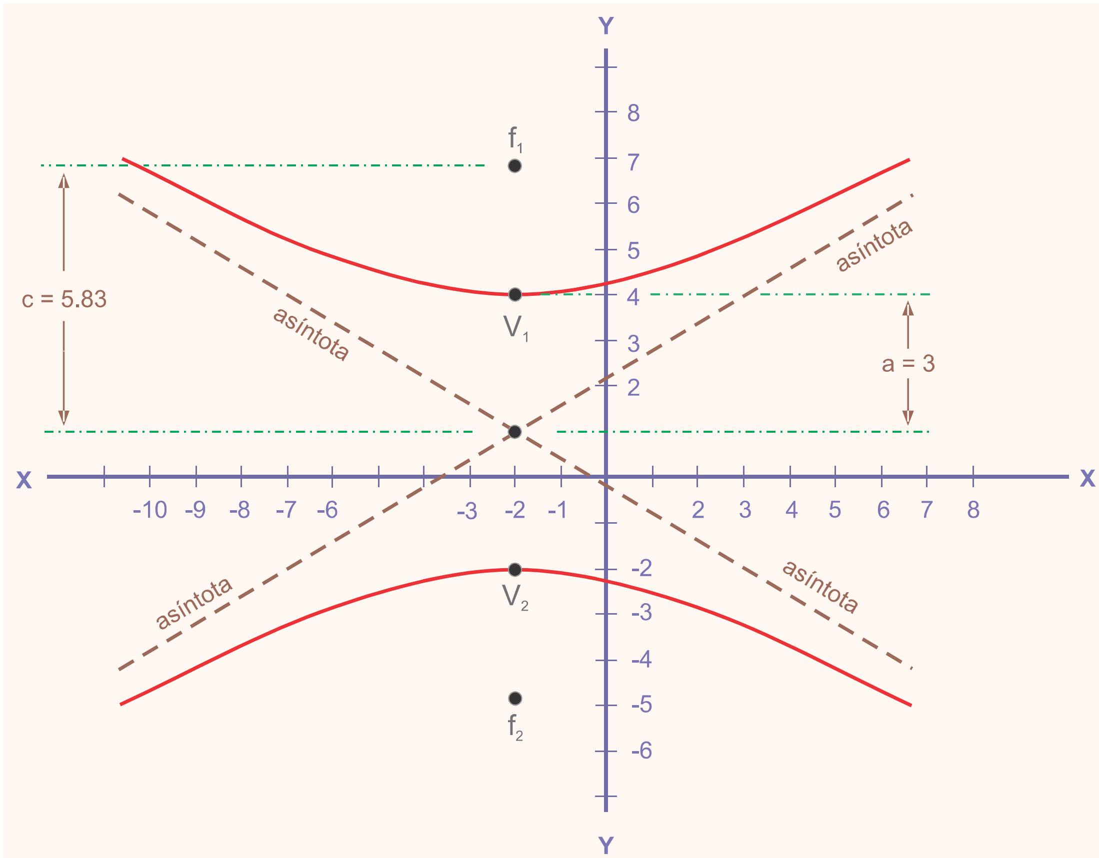

figura 8.4

Ejemplo 4: Una hipérbola tiene por asíntotas a las rectas $7x - 6y + 6 = 0$ y $7x + 6y - 6 = 0$ con eje focal horizontal. Hallar su ecuación.

Solución: Como el punto de intersección de las asíntotas es el centro de la hipérbola, entonces resolviendo por simultáneas las ecuaciones de dichas asíntotas se obtienen los valores de h y de k.

$$\left.\begin{aligned} 7x - 6y + 6 &= 0 \\ 7x + 6y - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{por simultáneas}$$

Resolviendo con la calculadora se obtiene que $x = 0$ y $y = 1$; pero esta *equis* es realmente el valor de h y esta *ye* es el valor de k por ser las coordenadas del centro, así que $h = 0$ y $k = 1$.

Pasando a su ecuación particular la primera de las asíntotas:

$$7x - 6y + 6 = 0$$
$$-6y = -7x - 6$$
$$\frac{-6y}{-6} = \frac{-7x}{-6} - \frac{6}{-6}$$
$$y = \frac{7}{6}x + 1$$

Como la pendiente de las asíntotas es $\frac{b}{a}$ (una es positiva y la otra negativa), en este caso por tratarse de una hipérbola horizontal se deduce que $b = 7$ y que $a = 6$. Por lo tanto, la ecuación de esta hipérbola es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-0)^2}{6^2} - \frac{(y-1)^2}{7^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{49} = 1}$$

EJERCICIO 8.1

Transformar a la forma particular las siguientes ecuaciones de hipérbolas:

1) $4x^2 - y^2 + 8x - 6y - 21 = 0$

2) $25x^2 - 4y^2 - 150x - 8y + 121 = 0$

3) $x^2 - 4y^2 + 4x - 32y - 24 = 0$

4) $25x^2 - 64y^2 - 350x - 1024y - 1271 = 0$

5) $9x^2 - 16y^2 + 162x + 32y + 569 = 0$

6) $x^2 - 25y^2 - 22x - 150y - 79 = 0$

7) $25x^2 - 36y^2 + 100x - 72y + 964 = 0$

8) $x^2 - 4y^2 - 2x - 48y - 147 = 0$

Transformar a su ecuación general las siguientes hipérbolas:

9) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

10) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-8)^2}{9} = 1$

11) $\frac{(x-4)^2}{36} - \frac{(y+7)^2}{4} = 1$

12) $\frac{(x+9)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{49} = 1$

13) $\frac{(y+8)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$

14) $\frac{(y-11)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$

15) $\frac{y^2}{100} - \frac{(x+7)^2}{49} = 1$

16) $\frac{x^2}{24} - \frac{(y+3)^2}{10} = 1$

En los siguientes problemas hallar la ecuación de la Hipérbola y todos sus elementos restantes:

17) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1 (1, 11)$ y $V_2 (1, -15)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1 (1, 12)$ y $f_2 (1, -16)$.

18) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1 (-10, 2)$ y $V_2 (16, 2)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1 (-12, 2)$ y $f_2 (18, 2)$.

19) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1 (-4, 0)$ y $V_2 (16, 0)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1 (-7, 0)$ y $f_2 (19, 0)$.

20) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1 (13, 0)$ y $V_2 (-17, 0)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.

21) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1 (-9, 1)$ y $V_2 (17, 1)$ y la longitud de su eje imaginario es 2.

22) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1(4, 15)$ y $V_2(4, -25)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.

23) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(1, 5)$ y $f_2(1, -5)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.

24) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(-10, -2)$ y $f_2(0, -2)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.

25) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(-5, 0)$ y $f_2(5, 0)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.

26) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(3, -1)$, la de uno de sus focos es $f_2(16, -1)$ y la longitud de su eje imaginario es 24.

27) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(0, 2)$, la de uno de sus focos es $f_2(5, 2)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.

PROBLEMAS ESPECIALES

Hallar las ecuaciones de las asíntotas en los siguientes problemas:

28) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(-2, -10)$ y $f_2(-2, 0)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.

29) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(0, -5)$ y $f_2(0, 5)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.

31) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(3, -1)$, la de uno de sus focos es $f_2(16, -1)$ y la longitud de su eje imaginario es 10.

32) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(0, 2)$, la de uno de sus focos es $f_2(5, 2)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.