2 EL PLANO CARTESIANO

2.1 INTRODUCCIÓN

Se dice que algo está plano cuando no tiene relieves ni concavidades, o sea ni salientes ni regiones como “sumidas”. Cuando ninguna parte de su superficie se curva ni dobla. Por ejemplo, el pizarrón, la pasta de un libro cerrado, una pared recta, etc.

La palabra *plano*(*a*) es un adjetivo cuando se emplea para denotar una cualidad o accidente de un objeto, por ejemplo *la pared plana*, *el pizarrón plano*. En estos casos el artículo le pertenece al nombre sustantivo u objeto, *la pared*, *el pizarrón*. Pero se puede sustantivar dándole el valor y significación de nombre sustantivo, en cuyos casos se mencionará con un artículo: *el plano* o bien *un plano*. Derivado de esto es el objeto escolar llamado *geoplano*, invento más comercial que didáctico empleado en las primarias con el que se dice que enseñan de mejor manera a los niños geometrías y matemáticas.

Para localizar un objeto en un plano se emplea *el plano cartesiano*. Contiene dos ejes, uno horizontal y otro vertical. El punto donde se cruzan ambos ejes se llama *origen*. Verlo en la figura 2.1

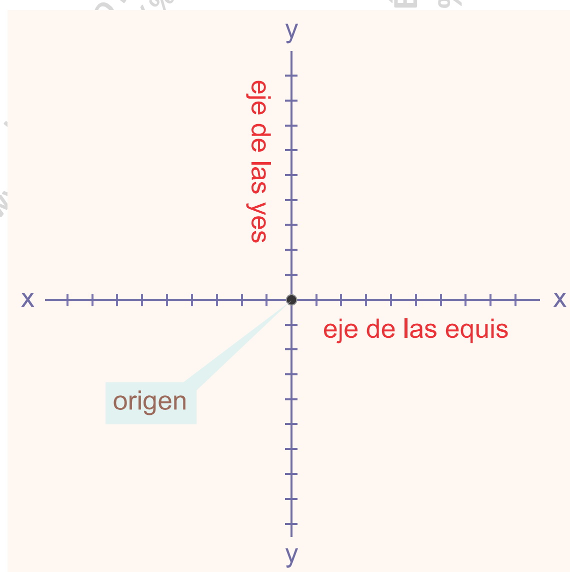

figura 2.1

Sobre cada eje se marcan pequeñas divisiones uniformemente distanciadas que representan unidades de longitud.

Para decir en dónde está situado un punto, se dan la distancia horizontal y vertical respecto del origen en que se encuentra. Para no decir “distancia horizontal” se le llama *eje equis*; para no decir “distancia vertical” se le llama *eje ye*.

Para no decir si está a la derecha o a la izquierda del origen se asigna signo positivo si está a la derecha y signo negativo si está a la izquierda.

Para no decir si está hacia arriba o abajo del origen se asigna *signo positivo* si está hacia arriba y si está hacia abajo de asigna *signo negativo*.

Las distancias horizontal y vertical respecto del origen se ponen entre paréntesis separadas por una coma, que representan tales distancias en ese orden. A esos valores se les llama *coordenadas*.

Por ejemplo, si un punto P (figura 2.2) está situado a siete unidades en horizontal hacia la izquierda del origen y a tres unidades en vertical hacia arriba del origen, su nombre y ubicación se representará de la siguiente forma $\mathrm{P}\left(-7, 3\right)$

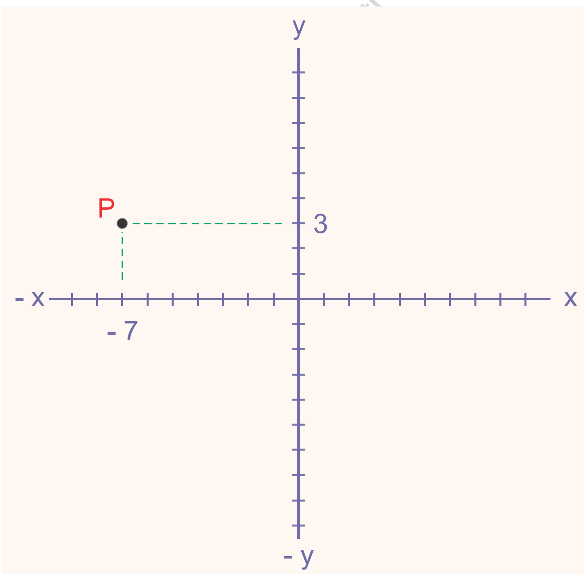

figura 2.2

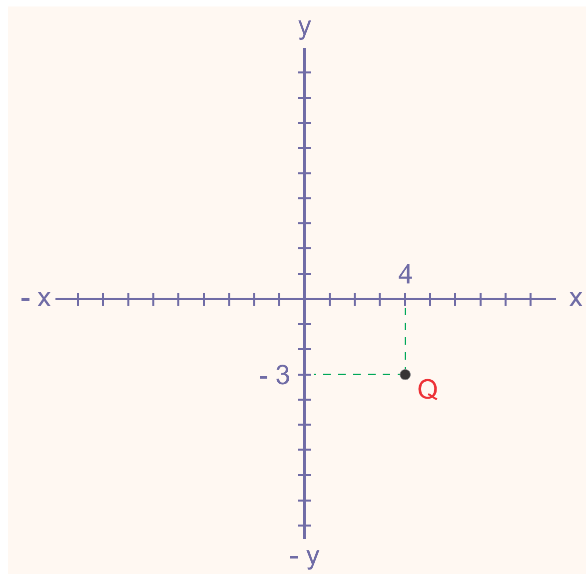

figura 2.3

LUIS CASTRO
www.fic.umich.mx

y se dirá que sus coordenadas son:

$$x = -7$$
$$y = 3$$

Una especie de problema inverso sería que dadas las coordenadas de algún punto Q, localizarlo en el plano cartesiano. Por ejemplo si Q(4, - 3) se está especificando que dicho punto se encuentra horizontalmente (en x) a 4 unidades a la derecha del origen (por ser positivo), y verticalmente (en *ye*) a 3 unidades del origen hacia abajo (por ser negativo), como está mostrado en la figura 2.3.

El punto R(- 5, 0) está situado horizontalmente (en el eje x) a cinco unidades del origen hacia la izquierda (por ser negativo) y verticalmente (en el eje de las *ye'^s*) no está desplazado del origen, coloquialmente se diría que nada para arriba y nada para abajo. Su ubicación en el plano cartesiano se muestra en la figura 2.4.

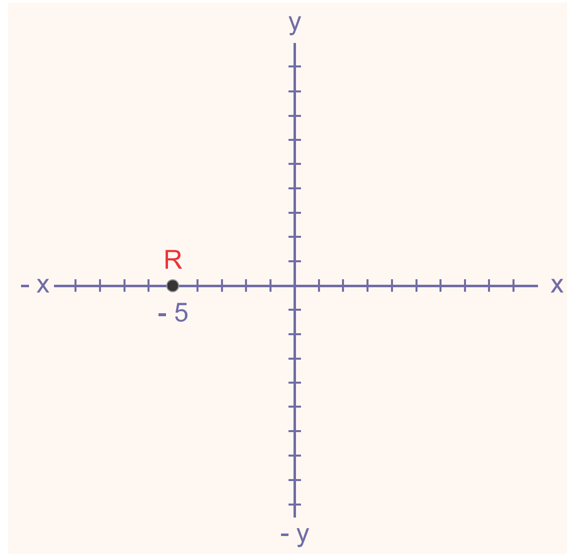

figura 2.4

En términos genéricos, a toda distancia horizontal medida desde el origen, o sea la coordenada equis, se le llama *abscisa*. También es la distancia horizontal medida a partir del eje *ye*. A toda distancia vertical medida desde el origen, o sea la coordenada *ye*, se le llama *ordenada*. También es la distancia vertical medida a partir del eje x.

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

EJERCICIO 2.1

Localizar en el plano cartesiano los siguientes puntos:

1)	P(3, - 1)	2)	Q(0, 0)	3)	R(0, - 6)
4)	S(-2, - 1)	5)	A(4, 4)	6)	B(8, 0)
7)	C(- 3, 5)	8)	D(- 7, 0)	9)	E(0, 6)

Escribir con la notación adecuada los nombres y ubicaciones de los puntos que se muestran en el siguiente plano cartesiano de la figura 2.5:

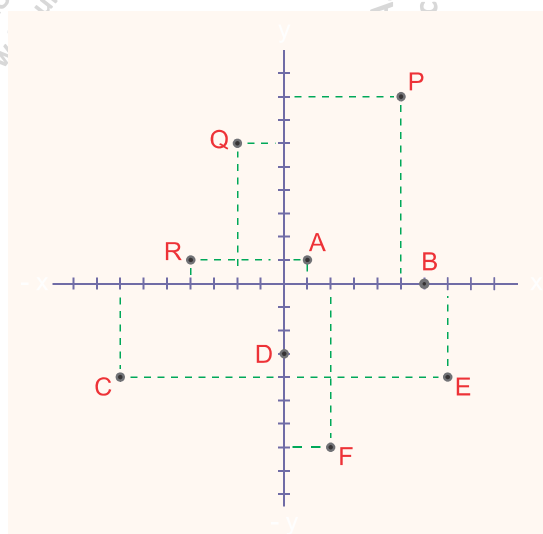

figura 2.5

2.2 REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Una ecuación se puede representar de dos formas diferentes siendo ambas la misma cosa. Una es la representación simbólica que emplea números, letras y operandos. La otra es la representación gráfica que emplea el plano cartesiano y en él precisamente una gráfica.

Supóngase que el valor de la literal *ye* va a ser siempre el doble de un número (x) más uno.

Por ejemplo, si la equis tiene un valor de seis, la *ye* es su doble más uno, es decir el doble de seis más uno que es trece. $y = 2(6) + 1$. O sea que

$$x = 6$$
$$y = 13$$

Pero si la equis es cuatro, la *ye* es $y = 2(4) + 1$, esto es:

$$x = 4$$
$$y = 9$$

O si la equis es menos tres, la *ye* es $y = 2(-3) + 1$, esto es:

$$x = -3$$
$$y = -5$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

Como se ve, es interminable el número de valores que se le puedan asignar a las equis. Para representar en forma genérica la relación que hay entre una cantidad (*ye*) con otro número (x) cuyo doble más uno genera el valor *ye* se escribe simbólicamente la ecuación

$$y = 2x + 1$$

Sin embargo, esta misma relación se puede representar de manera gráfica en el plano cartesiano. Si se toman como puntos los pares de valores antes obtenidos $P(6, 13)$, $Q(4, 9)$ y $R(-3, -5)$, se ubican en el plano y se unen se obtiene la recta de la figura 2.6.

Tanto la ecuación $y = 2x + 1$ como la recta mostrada en la figura 2.6 son exactamente lo mismo, son la misma cosa, pero con representaciones

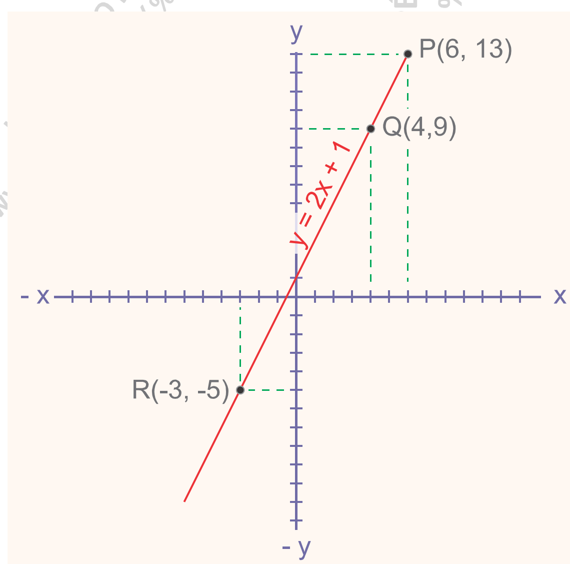

figura 2.6

diferentes. El alumno debe comprobar que tomando cualquier valor para x en la gráfica y luego desplazándose hasta la recta para ver qué valor en *ye* le corresponde, verá que es el doble de la x más uno.

Entonces para obtener la representación gráfica de una ecuación se hace exactamente lo hecho en el ejemplo anterior, solamente que cada par de valores se van anotando en una tabla, por lo que a este procedimiento se le llama *graficar por tabulación*. La tabla puede hacerse horizontal o vertical.

Ejemplo 2.1: Obtener la representación gráfica de la ecuación $y = 4x - 3$.

Solución:

x	0			
y	- 3			

Se obtuvo de:

Si $x = 0$, entonces

$$y = 4(0) - 3$$
$$y = -3$$

x	0	1		
y	- 3	1		

Se obtuvo de:

Si $x = 1$, entonces

$$y = 4(1) - 3$$
$$y = 1$$

x	0	1	2	
y	- 3	1	5	

Se obtuvo de:

Si $x = 2$, entonces

$$y = 4(2) - 3$$
$$y = 5$$

x	0	1	2	- 1
y	- 3	1	5	- 7

Se obtuvo de:

Si $x = -1$, entonces

$$y = 4(-1) - 3$$
$$y = -7$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.fic.umich.mx / %7elcastro

Cada par de valores (x, y) representan un punto en el plano cartesiano. Éstos se dibujan allí y luego se unen como está mostrado en la figura 2.7.

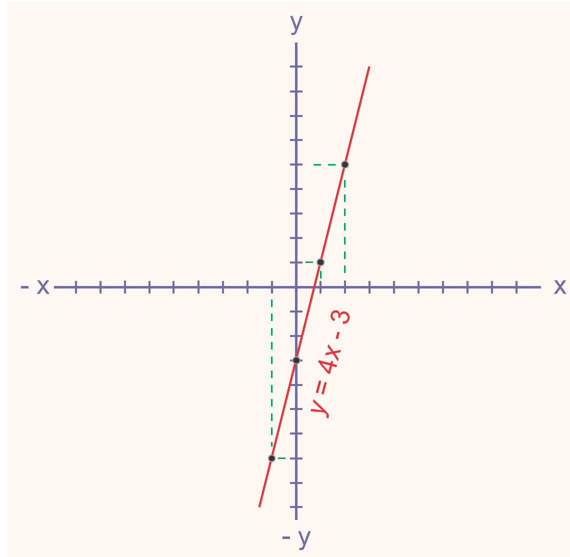

figura 2.7

Ejemplo 2.2 Obtener la representación gráfica de la ecuación $y = x^2 - 4x + 3$.

Solución: Esta ecuación lo que dice es que si se toma un número cualquiera llamado equis, se eleva al cuadrado, se le resta el cuádruplo de dicho número y finalmente se le suman tres se obtiene alguna cantidad llamada *ye*. Si se toma otro número cualquiera llamado equis, se eleva al cuadrado, se le resta el cuádruplo de dicho número y finalmente se le suman tres se obtiene otra cantidad llamada *ye*. El proceso se puede repetir indefinidamente. El conjunto de cantidades *ye* que se pueden obtener de esta forma asociadas a cada número equis seleccionado se puede representar gráficamente en el plano cartesiano a través de una tabulación como se hizo en el ejemplo anterior:

x	- 1						
y	8						

Se obtuvo de:

Si $x = -1$, entonces

$$y = (-1)^2 - 4(-1) + 3$$

$$y = 8$$

x	- 1	0					
y	8	3					

Se obtuvo de:

Si $x = 0$

$$y = 0^2 - 4(0) + 3$$

$$y = 3$$

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

x	- 1	0	1				
y	8	3	0				

Se obtuvo de:

Si $x = 1$, entonces

$$y = 1^2 - 4(1) + 3$$

$$y = 0$$

x	- 1	0	1	2			
y	8	3	0	- 1			

Se obtuvo de:

Si $x = 2$

$$y = 2^2 - 4(2) + 3$$

$$y = -1$$

x	- 1	0	1	2	3		
y	8	3	0	- 1	0		

Se obtuvo de:

Si $x = 3$

$$y = 3^2 - 4(3) + 3$$

$$y = 0$$

x	- 1	0	1	2	3	4	
y	8	3	0	- 1	0	3	

Se obtuvo de:

Si $x = 4$

$$y = 4^2 - 4(4) + 3$$

$$y = 3$$

x	- 1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	- 1	0	3	8

Se obtuvo de:

Si $x = 5$

$$y = 5^2 - 4(5) + 3$$

$$y = 8$$

Cada par de valores (x, y) representan un punto en el plano cartesiano como está mostrado en la figura 2.8. Las gráficas no son líneas quebradas, o son rectas o son curvas. En este caso como no es recta al unir los puntos se ha curvado la gráfica. La figura 2.9 muestra una gráfica malhecha por haberla construido con segmentos rectos y no curvos.

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

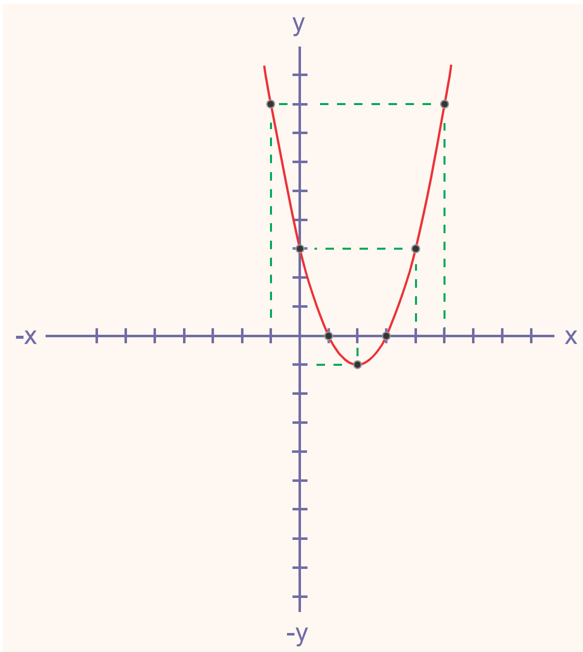

figura 2.8

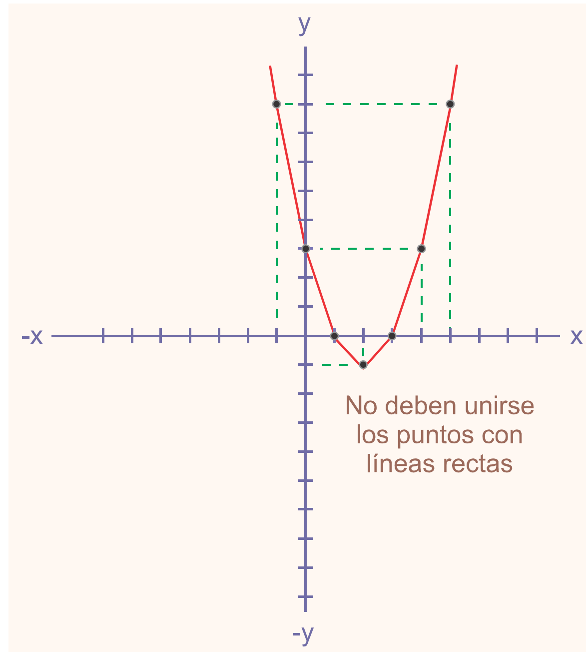

figura 2.9

LUIS CASTRO PÉREZ www.fic.umich.mx / %7elcastro

EJERCICIO 2.2

Obtener la representación gráfica de las siguientes ecuaciones:

1) $y = 2x + 2$

2) $y = x - 4$

3) $y = 3x$

4) $y = -x + 1$

5) $y = -2x + 4$

6) $y = -3x$

7) $y = 4x - 5$

8) $y = -\dfrac{x}{2} + 3$

9) $y = x^2 - 2x + 2$

10) $y = x^2 + 2$

11) $y = x^2 + 4x + 3$

12) $y = x^2 - 4x + 6$

13) $y = 2x^2 - 4x$

14) $y = 2x^2 + 4x + 3$

15) $y = 0.5x^2 + x - 0.5$

16) $y = 0.2x^2 - 2x + 4$