

CAPÍTULO 8

LA HIPÉRBOLA

8.1 DEFINICIONES

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante e igual a $2a$.

La simbología que se utiliza para representar las partes fundamentales de la hipérbola es la siguiente:

- * La letra a representa la distancia que hay desde el centro hasta cada extremo central de cada rama de la hipérbola. Ver la figura 8.1.
- * La letra b representa una distancia imaginaria, la cual está regida por la relación de las constantes a , b y c , que un poco más adelante se definirá.
- * La letra c representa la distancia que hay desde el centro hasta cada foco.

Las características de una hipérbola, mostradas en la figura 8.1, son las siguientes:

- * La distancia de su centro a los focos, llamada c (minúscula).

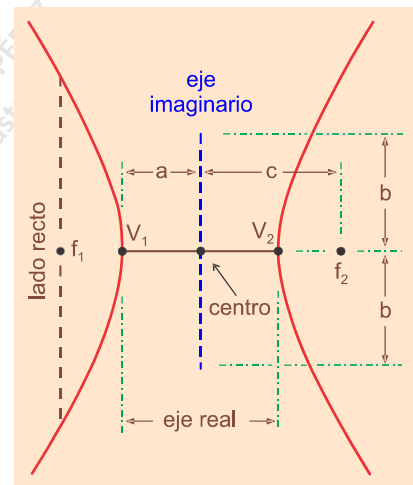


figura 8.1

- * La distancia de su centro a los vértices, llamada a .
- * *Eje real*: Es la distancia de un vértice hasta el otro.
- * *Distancia focal*: Es la distancia de un foco hasta el otro.
- * *Eje imaginario*: Es la distancia $2b$. El valor de b sale de una relación pitagórica entre las constantes a y c , dada más adelante.
- * La posición del centro dada, como en todas las cónicas anteriores que poseen al menos un término al cuadrado, por (h, k) .
- * *Lado recto*: Es la cuerda perpendicular al eje real y que pasa por los focos.
- * *Eje focal*: Es el eje por donde pasan los dos focos y los dos vértices.

Hay dos posibilidades de obtener una hipérbola: **horizontal** o **vertical**.

Todas esas características están dadas en la ecuación particular de la hipérbola, que de hecho son dos, según se trate de una hipérbola horizontal o de una hipérbola vertical.

Podrá verse que hay varios aspectos que son muy semejantes a la elipse, inclusive en la ecuación particular existen muchas similitudes.

Existe una relación entre las tres constantes a , b y c , que por el teorema de Pitágoras está dada por la relación

$$c^2 = a^2 + b^2$$

de donde, despejando cada literal, se obtiene:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

A partir de las coordenadas del centro (h, k) , de la longitud del semieje real a y de la longitud del semieje imaginario b se pueden obtener o deducir todas las características anteriores, las cuales están dadas en la ecuación particular de la hipérbola, que de hecho son dos, según se trate de una hipérbola horizontal o de una hipérbola vertical.

Para saber si se trata de una hipérbola horizontal o vertical, basta observar las dos fracciones de la ecuación particular, las cuales una debe ser positiva y la otra negativa. La que queda positiva indica la variable sobre la que está el eje focal.

La ecuación particular de la hipérbola es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{si el eje focal es horizontal}$$

o bien

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{si el eje focal es vertical}$$

Igual que en las anteriores cónicas que tienen términos al cuadrado, h significa el desplazamiento horizontal del centro y k el desplazamiento vertical del centro. El significado de las letras a y b de los denominadores están definidos en la figura 8.1.

La hipérbola tiene asociadas dos líneas rectas a las cuales parece irse pegando más y más la curva, sin llegar jamás a cruzarse. A esas rectas, mostradas en la figura 8.2, se les llama *asíntotas*.

En general, se le da el nombre de *asíntota* a toda línea recta que, al prolongarse continuamente la curva se acerca a dicha recta sin llegar jamás a encontrarla.

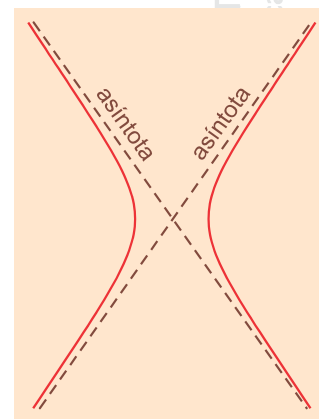


figura 8.2

Las *asíntotas* tienen por ecuaciones:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \quad \text{si el eje real es paralelo al eje } x. \text{ La pendiente es } m = \frac{b}{a}$$

$$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h) \quad \text{si el eje real es paralelo al eje } y. \text{ La pendiente es } m = \frac{a}{b}$$

Otra característica interesante de la hipérbola es la longitud de su lado recto, el cual mide, igual que en la elipse,

$$lr = \frac{2b^2}{a}$$

en donde las letras a y b que aparecen, son las mismas definidas anteriormente.

8.2 TRANSFORMACIONES

Dar, por medio de una regla, como se hizo en el caso de la circunferencia y de la parábola, el procedimiento para transformar de la ecuación general a la particular, en el caso de la hipérbola resulta muy extenso; de manera que, por esa razón, se va a mostrar dicho proceso a través de un ejemplo.

Ejemplo 1: La ecuación general de una hipérbola es $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$. Transformarla a su ecuación particular.

Solución: Para tratar de dar claridad a la explicación, se hará por pasos la transformación pedida.

PASO 1: Se agrupan en el lado izquierdo los términos que contengan a las mismas variables y se escribe en el lado derecho la constante sola:

$$(4x^2 - 16x) - (9y^2 + 18y) = 29$$

PASO 2: Se factoriza en cada grupo el coeficiente del término al cuadrado:

$$4(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 2y) = 29$$

PASO 3: Se completa un trinomio cuadrado perfecto en cada grupo, añadiendo al lado derecho la misma cantidad agregada en el izquierdo:

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 2y + 1) = 29 + 16 - 9$$

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 2y + 1) = 36$$

NOTA: Se agregó 16 en el lado derecho porque es el 4 que se agregó adentro del primer paréntesis, el cual está multiplicado todo por 4; de la misma forma, en el segundo paréntesis se agregó adentro un 1, pero como está multiplicado por -9 , en realidad fue -9 que en total da 16 lo que se agregó.

PASO 4: Se factorizan los dos paréntesis:

$$4(x - 2)^2 - 9(y + 1)^2 = 36$$

PASO 5: Se dividen ambos lados de la igualdad entre 36 (para obtener del lado derecho igual a 1 como está en la ecuación particular) y se simplifica:

$$\frac{4(x - 2)^2}{36} - \frac{9(y + 1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

donde $a^2 = 9$ (por ser el primer denominador) y $b^2 = 4$ (por ser el segundo denominador); por lo tanto, se trata de una hipérbola horizontal, ya que la fracción positiva contiene a la variable x .

De esta ecuación se obtienen los valores de: $h = 2$; $k = -1$; $a = 3$; $b = 2$. Y por la relación de las constantes a , b y c , se obtiene que

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{9 + 4}$$

$$c \approx 3.6$$

Se trata de una hipérbola cuyo centro está en $O(2, -1)$, como lo muestra la figura 8.3 .

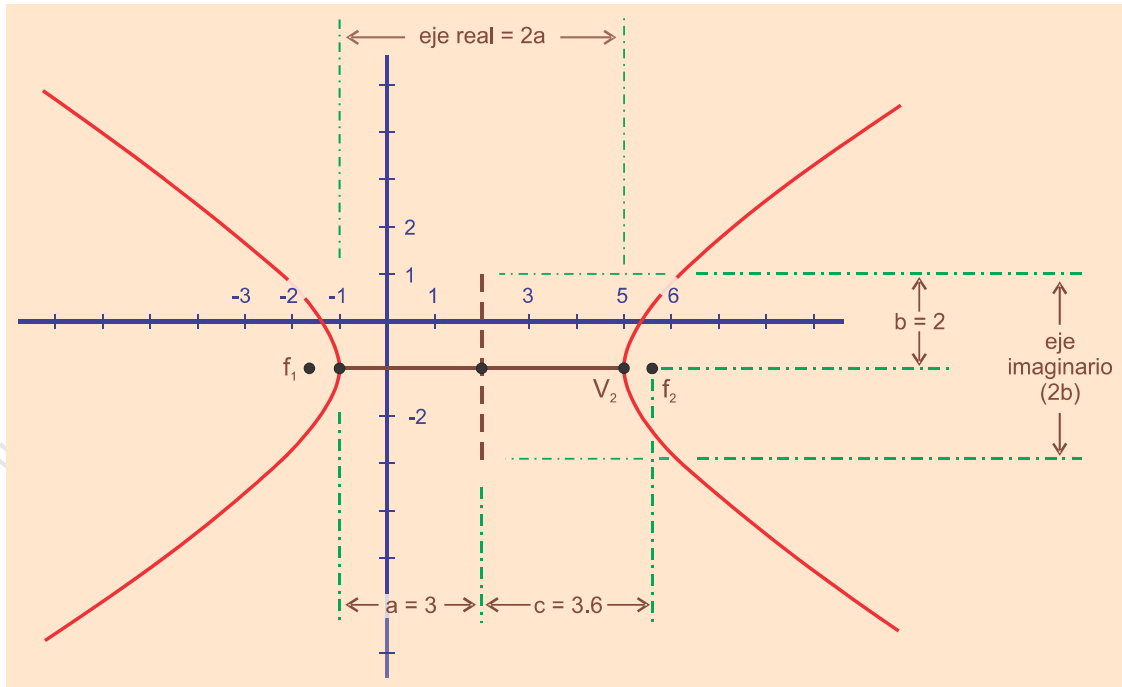


figura 8.3

Si $a = 3$ es la distancia del centro a los vértices, las coordenadas de los vértices se obtienen contando tres unidades a la izquierda y tres a la derecha a partir del centro:

$$V_1(2 - 3, -1) = V_1(-1, -1)$$

$$V_2(2 + 3, -1) = V_2(5, -1)$$

La longitud del eje real es igual a $2a = 2(3) = 6$; la del eje imaginario es $2b = 4$.

Si $c \approx 3.6$ es la distancia del centro a los focos, las coordenadas de los focos se obtienen contando 3.6 unidades a la izquierda y 3.6 a la derecha a partir del centro:

$$f_1(2 - 3.6; -1) = f_1(-1.6; -1)$$

$$f_2(2 + 3.6; -1) = f_2(5.6; -1)$$

Ejemplo 2: Transformar a su ecuación general la siguiente ecuación particular de una hipérbola:

$$\frac{(x+4)^2}{49} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Solución: Para eliminar los denominadores, debe multiplicarse toda la igualdad por el producto de los dos denominadores, es decir, por 196. Haciéndolo, se obtiene:

$$196 \left(\frac{(x+4)^2}{49} \right) - 196 \left(\frac{(y-2)^2}{4} \right) = 196(1)$$

simplificando:

$$4(x+4)^2 - 49(y-2)^2 = 196$$

elevando al cuadrado los binomios indicados:

$$4(x^2 + 8x + 16) - 49(y^2 - 4y + 4) = 196$$

haciendo las multiplicaciones indicadas:

$$4x^2 + 32x + 64 - 49y^2 + 196y - 196 = 196$$

finalmente, escribiendo todo en el lado izquierdo, reduciendo términos semejantes y ordenando conforme a la forma de la ecuación general, se llega a:

$$4x^2 + 32x + 64 - 49y^2 + 196y - 196 - 196 = 0$$

$$4x^2 - 49y^2 + 32x + 196y - 328 = 0$$

Ejemplo 3: Hallar las coordenadas de los vértices y los focos, las ecuaciones de sus asíntotas, así como la longitud de sus ejes real e imaginario de la siguiente hipérbola. Esbozar su gráfica.

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{25} = 1$$

Solución: La fracción positiva contiene a la variable y , lo que significa que el eje focal es paralelo al eje y . Por los denominadores, se tiene que

$$a^2 = 9$$

$$b^2 = 25$$

de donde

$$a = 3$$

$$b = 5$$

por lo tanto

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{9 + 25} \approx 5.83$$

además

$$h = -2$$

$$k = 1$$

Si las coordenadas del centro son $O(-2, 1)$, sumándole y restándole a su ordenada (porque se trata de una hipérbola vertical) el valor de $c = 5.83$, se obtienen las coordenadas de los focos, o sea

$$f_1(-2; 1 + 5.83) = f_1(-2; 6.83)$$

$$f_2(-2; 1 - 5.83) = f_2(-2; -4.83)$$

De la misma forma, si las coordenadas del centro son $O(-2, 1)$, sumándole y restándole a su ordenada (porque se trata de una hipérbola vertical) el valor de $a = 3$, se obtienen las coordenadas de los vértices, o sea

$$V_1(-2; 1+3) = V_1(-2, 4)$$

$$V_2(-2; 1-3) = V_2(-2, -2)$$

La longitud del eje real es $2a = 2(3) = 6$; mientras que la longitud del eje imaginario es $2b = 2(5) = 10$.

Las ecuaciones de sus asíntotas se calculan con $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$ por ser el eje real es paralelo al eje ye .

Para la primera asíntota se tiene que

$$y - 1 = \frac{3}{5}(x + 2)$$

$$5(y - 1) = 3(x + 2)$$

$$5y - 5 = 3x + 6$$

$$3x - 5y + 11 = 0$$

Para la segunda asíntota se tiene que

$$y - 1 = -\frac{3}{5}(x + 2)$$

$$5(y - 1) = -3(x + 2)$$

$$5y - 5 = -3x - 6$$

$$3x + 5y + 1 = 0$$

La gráfica correspondiente se muestra en la figura 8.4:

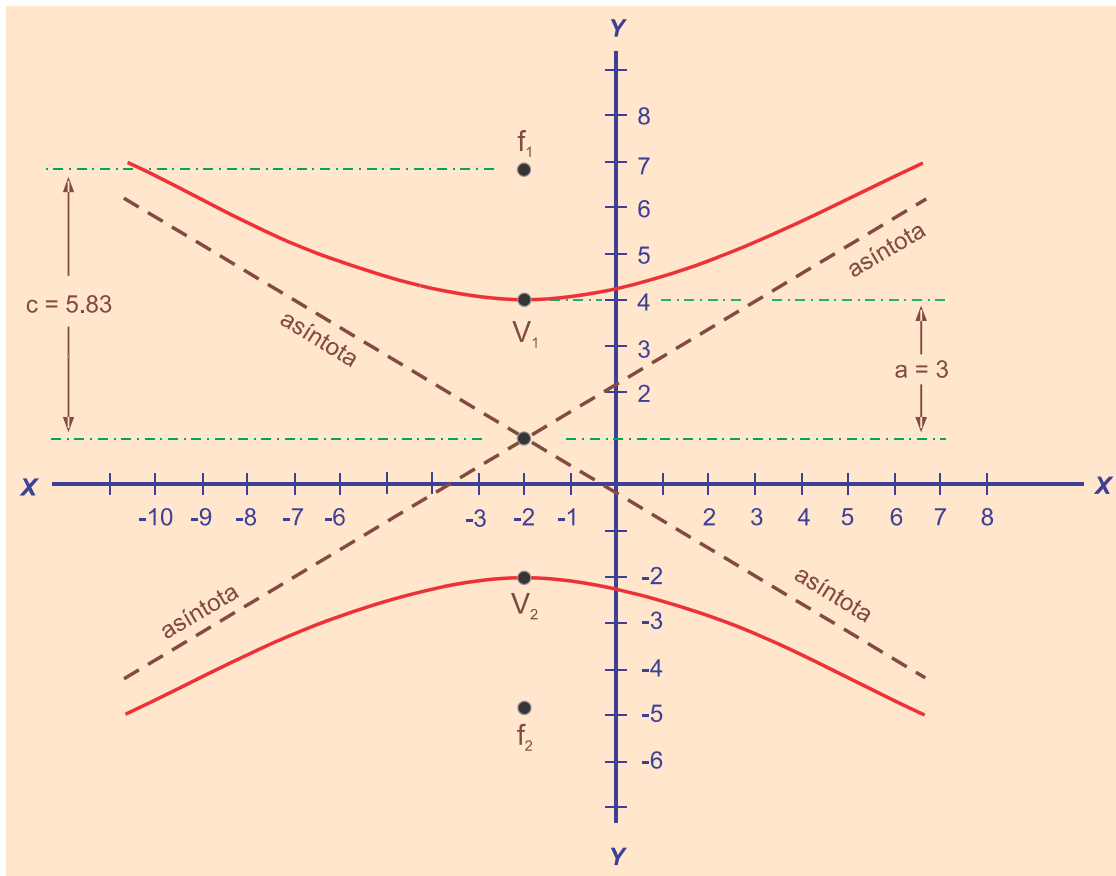


figura 8.4

Ejemplo 4: Una hipérbola tiene por asíntotas a las rectas $7x - 6y + 6 = 0$ y $7x + 6y - 6 = 0$ con eje focal horizontal. Hallar su ecuación.

Solución: Como el punto de intersección de las asíntotas es el centro de la hipérbola, entonces resolviendo por simultáneas las ecuaciones de dichas asíntotas se obtienen los valores de h y de k .

$$\left. \begin{array}{l} 7x - 6y + 6 = 0 \\ 7x + 6y - 6 = 0 \end{array} \right\} \text{por simultáneas}$$

Resolviendo con la calculadora se obtiene que $x = 0$ y $y = 1$; pero esta *equis* es realmente el valor de h y esta *ye* es el valor de k por ser las coordenadas del centro, así que $h = 0$ y $k = 1$.

Pasando a su ecuación particular la primera de las asíntotas:

$$7x - 6y + 6 = 0$$

$$-6y = -7x - 6$$

$$\frac{-6y}{-6} = \frac{-7x}{-6} - \frac{6}{-6}$$

$$y = \frac{7}{6}x + 1$$

Como la pendiente de las asíntotas es $\frac{b}{a}$ (una es positiva y la otra negativa), en este caso por tratarse de una hipérbola horizontal se deduce que $b = 7$ y que $a = 6$. Por lo tanto, la ecuación de esta hipérbola es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{6^2} - \frac{(y-1)^2}{7^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{49} = 1$$

EJERCICIO 8.1

Transformar a la forma particular las siguientes ecuaciones de hipérbolas:

- | | | | |
|----|----------------------------------------|----|-------------------------------------------|
| 1) | $4x^2 - y^2 + 8x - 6y - 21 = 0$ | 2) | $25x^2 - 4y^2 - 150x - 8y + 121 = 0$ |
| 3) | $x^2 - 4y^2 + 4x - 32y - 24 = 0$ | 4) | $25x^2 - 64y^2 - 350x - 1024y - 1271 = 0$ |
| 5) | $9x^2 - 16y^2 + 162x + 32y + 569 = 0$ | 6) | $x^2 - 25y^2 - 22x - 150y - 79 = 0$ |
| 7) | $25x^2 - 36y^2 + 100x - 72y + 964 = 0$ | 8) | $x^2 - 4y^2 - 2x - 48y - 147 = 0$ |

Transformar a su ecuación general las siguientes hipérbolas:

- | | | | |
|-----|----------------------------------------------|-----|-----------------------------------------------|
| 9) | $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ | 10) | $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-8)^2}{9} = 1$ |
| 11) | $\frac{(x-4)^2}{36} - \frac{(y+7)^2}{4} = 1$ | 12) | $\frac{(x+9)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{49} = 1$ |
| 13) | $\frac{(y+8)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$ | 14) | $\frac{(y-11)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$ |
| 15) | $\frac{y^2}{100} - \frac{(x+7)^2}{49} = 1$ | 16) | $\frac{x^2}{24} - \frac{(y+3)^2}{10} = 1$ |

En los siguientes problemas hallar la ecuación de la Hipérbola y todos sus elementos restantes:

- 17) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1(1, 11)$ y $V_2(1, -15)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(1, 12)$ y $f_2(1, -16)$.
- 18) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1(-10, 2)$ y $V_2(16, 2)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(-12, 2)$ y $f_2(18, 2)$.
- 19) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1(-4, 0)$ y $V_2(16, 0)$ y las coordenadas de sus focos son $f_1(-7, 0)$ y $f_2(19, 0)$.
- 20) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1(13, 0)$ y $V_2(-17, 0)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.
- 21) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1(-9, 1)$ y $V_2(17, 1)$ y la longitud de su eje imaginario es 2.

- 22) Las coordenadas de los vértices de una hipérbola son $V_1(4, 15)$ y $V_2(4, -25)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.
- 23) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(1, 5)$ y $f_2(1, -5)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.
- 24) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(-10, -2)$ y $f_2(0, -2)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.
- 25) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(-5, 0)$ y $f_2(5, 0)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.
- 26) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(3, -1)$, la de uno de sus focos es $f_2(16, -1)$ y la longitud de su eje imaginario es 24.
- 27) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(0, 2)$, la de uno de sus focos es $f_2(5, 2)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.

PROBLEMAS ESPECIALES

Hallar las ecuaciones de las asíntotas en los siguientes problemas:

- 28) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(-2, -10)$ y $f_2(-2, 0)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.
- 29) Las coordenadas de los focos de una hipérbola son $f_1(0, -5)$ y $f_2(0, 5)$ y la longitud de su eje imaginario es 8.
- 30) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(3, -1)$, la de uno de sus focos es $f_2(16, -1)$ y la longitud de su eje imaginario es 10.
- 31) Las coordenadas del centro de una hipérbola son $O(0, 2)$, la de uno de sus focos es $f_2(5, 2)$ y la longitud de su eje imaginario es 6.