

CAPÍTULO 8

PROBABILIDAD

8.1 DEFINICIÓN: *A la posibilidad de que un evento se verifique se le llama **Probabilidad**.*

Esa posibilidad, o sea qué tan posible o imposible es que el evento acontezca, se cuantifica en una escala que **va del cero al uno**. El cero significa *imposibilidad absoluta*; el uno significa *certeza total*. También se suele hacer esa cuantificación traducida a porcentaje, donde el uno queda representado por el 100%. Significa que un suceso que tenga una probabilidad $p = 0.1$ es que, sin ser totalmente imposible, resulta bastante difícil que se verifique por estar ese número mucho más próximo al cero que al uno.

Calcular o pedir que se calcule la probabilidad de algún evento cuya probabilidad es 0 ó 1 resulta un absurdo por estarse solicitando dicha probabilidad de algo que es imposible o que necesariamente va a suceder.

Debe entenderse que la probabilidad únicamente cuantifica la facilidad o dificultad para que cierto evento se verifique, pero no es una ley de acontecimiento, es decir, algo que tenga probabilidad $p = 0.5$ o lo que es lo mismo del 50%, significa que es igual de fácil que acontezca como difícil, o también se puede interpretar que, por ejemplo, de diez mil intentos, en cinco mil se verificará y en otros cinco mil no.

Mientras menor sea el número de experimentos, más difícil será que suceda lo que el cálculo de probabilidades predice. Por ejemplo, si la probabilidad de que salga la cara que tiene el 3 de un dado al lanzarlo es de un sexto. Lo mismo puede decirse para cada una de las seis caras. Entonces si se

lanza seis veces el dado es casi imposible que dentro de los seis lanzamientos salga una vez cada cara.

En cambio, si el dado se lanza doce millones de veces, el número de veces que haya salido la cara que tiene el 3 es casi seguro que habrá sido dos millones de veces.

Ejemplo 1: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado corriente salga el número 8?

Solución: Como el dado nada más tiene del 1 al 6, resulta totalmente imposible que salga el 8. Se trata de un caso de **imposibilidad absoluta**. De manera que su probabilidad es **0**.

Ejemplo 2: En una caja se introducen 5 fichas todas de color verde. Se escoge una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha seleccionada sea verde?

Solución: Como nada más hay fichas verdes en la caja, cualquiera que se escoja será verde. Se trata de un caso de **certeza absoluta**. De manera que su probabilidad es **1**.

Desde el punto de vista Matemático solamente los eventos que se dan al azar tienen cabida en la cuantificación de su probabilidad. De lo contrario, resulta algo sin sentido o absurdo.

Por ejemplo, preguntar ¿Cuál es la probabilidad de que después del lunes siga el martes?, como no se trata de un hecho al azar, es absurda la pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo “A” gane mañana al equipo “B” en el partido de fútbol?: como el resultado no dependerá del azar, sino de las habilidades de los jugadores para superar al adversario durante el tiempo de enfrentamiento, carece de sentido la pregunta, no se puede cuantificar, no se puede decir que la probabilidad sea del 15%, o del 40%, o del 75%, etc.

Para cuantificar, o sea para “medir” la probabilidad de los eventos que ocurren al azar, se utiliza una relación que consiste en dividir el número de maneras en que puede verificarse el evento particular entre el número de maneras en que puede acontecer el evento general. Esto queda expresado en la siguiente fórmula:

8.1.1 FORMULA FUNDAMENTAL

Se le llama **evento general** o también **espacio muestral** al conjunto cuyos elementos son todos los posibles resultados. Por ejemplo, el evento general o espacio muestral del lanzamiento de un

dado es 6, ya que todos los resultados posibles son que caiga 1, o que caiga 2, o que caiga 3, o que caiga 4, o que caiga 5 o que caiga 6, no hay ninguna otra posibilidad.

Se le llama *evento particular* al elemento(s) seleccionado(s) del espacio muestral del cual se desea saber cierta probabilidad. Se llaman también casos favorables. Por ejemplo, si en el lanzamiento de un dado se desea saber la probabilidad de que caiga 4, este cuatro es el evento particular porque del espacio muestral es un caso particular.

La fórmula fundamental es

$$p = \frac{q}{r}$$

(1)

donde:

p = probabilidad

q = número de formas en que puede verificarse el evento particular, es decir el número de casos favorables o de éxito.

r = número de formas en que puede verificarse el evento general, es decir el número total de casos posibles.

El *evento particular* es la acción en particular de la cual se está investigando su probabilidad. Que suceda este evento particular se le llama *éxito*.

El *evento general* es el conjunto de acciones o resultados en total que pueden acontecer, entre los favorables y los no favorables, llamados éxito y fracaso. Se le suele llamar *espacio muestral*.

Ejemplo 3: Se lanza un dado corriente. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un múltiplo de tres?

Solución: En este caso, el evento particular o el éxito es que salga *tres* o que salga *seis*, ya que son los múltiplos de 3, por lo tanto $q = 2$ (hay dos formas en que puede verificarse). El evento general es que salga *uno* o que salga *dos*, o que salga *tres*, o que salga *cuatro*, o que salga *cinco* o que salga *seis*, por lo tanto $r = 6$ (hay seis formas en que puede caer el dado).

Utilizando la fórmula general de probabilidad (1) se obtiene

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

o bien $p = 33.333 \%$

Ejemplo 4: En una urna se depositan 3 fichas rojas, 7 fichas azules y 2 blancas. Se saca una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

Solución: En este caso, el evento particular o éxito es que salga una ficha roja, por lo tanto $q = 3$ (hay tres formas en que puede verificarse, una por cada ficha roja). El evento general es que salga una ficha cualquiera, por lo tanto $r = 12$ (hay doce formas en que puede salir una ficha).

Utilizando la fórmula general de probabilidad (1) se obtiene

$$p = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

o bien $p = 25 \%$

Ejemplo 5: Un jugador de dominó toma sus siete fichas. Calcular la probabilidad de que le salgan tres mulas (iguales las dos caras de la ficha).

Solución: En este caso, el evento particular o éxito es que salgan tres mulas y cuatro fichas más, por lo tanto, el número de formas es

$$q = {}_7C_3 \times {}_{21}C_4 = 209\,475$$

El evento general es que salgan 7 fichas cualesquiera de entre las 28, o sea

$$r = {}_{28}C_7 = 1\,184\,040$$

Utilizando la fórmula general de probabilidad (1) se obtiene

$$p = \frac{209\,475}{1\,184\,040} = 17.69\%$$

En casos como éste en el que resulta una fracción con números muy grandes en el numerador y/o en el denominador tales que no dan idea del valor de la probabilidad, es mejor expresarla en porcentaje.

8.2 SUCESOS DEPENDIENTES, INDEPENDIENTES Y EXCLUYENTES

*Dos o más sucesos son **dependientes** si la posibilidad de ocurrencia de uno depende de la posibilidad de ocurrencia del otro. La probabilidad de sucesos dependientes es el producto de las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos que lo componen.*

Ejemplo 7: En una urna se depositan dos fichas rojas y tres blancas. Se extraen dos de ellas, una después de la otra, sin devolver a la urna la primera sacada. Obtener la probabilidad de que ambas sean blancas.

Solución: Para la extracción de la primera ficha el evento particular o éxito es que salga blanca, o sea $q = 3$, mientras que el evento general es simplemente sacar una ficha cualquiera, es decir $r = 5$. La probabilidad de que la primera ficha sea blanca es

$$p = \frac{3}{5}$$

Para la extracción de la segunda ficha el evento particular o éxito es que salga blanca, o sea $q = 2$, ya que la anterior debió ser blanca para que se cumplan las condiciones del enunciado y no se devolvió a la urna, mientras que el evento general es simplemente sacar una ficha cualquiera, es decir $r = 4$, ya que por la anterior que no se devolvió quedó una menos. La probabilidad de que la segunda ficha sea también blanca es

$$p = \frac{2}{4}$$

De tal manera que la probabilidad de que ambas sean blancas es el producto de las dos probabilidades anteriores, o sea

$$p = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

*Dos o más sucesos son **independientes** si la posibilidad de ocurrencia de uno no depende de la posibilidad de ocurrencia del otro. La probabilidad de sucesos independientes es el producto de las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos*

Ejemplo 8: En una urna se depositan dos fichas rojas y tres blancas. Se extraen dos de ellas, una después de la otra, devolviendo a la urna la primera sacada antes de efectuar la segunda extracción. Obtener la probabilidad de que ambas sean blancas.

Solución: Para la extracción de la primera ficha el evento particular es que salga blanca, o sea $q = 3$, mientras que el evento general es simplemente sacar una ficha cualquiera, es decir $r = 5$. La probabilidad de que la primera ficha sea blanca es

$$p = \frac{3}{5}$$

Para la extracción de la segunda ficha el evento particular es que salga blanca, o sea $q = 3$, ya que la anterior debió devolverse a la urna antes de efectuar el segundo movimiento, mientras que el evento general es simplemente sacar una ficha cualquiera, es decir $r = 5$, ya que la anterior se devolvió. La probabilidad de que la segunda ficha sea también blanca es

$$p = \frac{3}{5}$$

De tal manera que la probabilidad de que ambas sean blancas es el producto de las dos probabilidades anteriores, o sea

$$p = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

*Dos o más sucesos son **excluyentes o exclusivos** si la posibilidad de ocurrencia de uno excluye o anula la posibilidad de ocurrencia del otro. La probabilidad de sucesos excluyentes es la suma de las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos*

Ejemplo 9: En una urna se depositan dos fichas rojas, tres blancas y cinco negras. Se extrae una de ellas. Obtener la probabilidad de que sea blancas o roja.

Solución: Se trata de sucesos excluyentes, ya que si sale ficha blanca anula la posibilidad de que sea roja, o a la inversa. Recordar que la conjunción “o” es la clave para detectar que se tratan de sucesos excluyentes, por eso en el enunciado se ha puesto en color rojo. La probabilidad pedida es

$$p = p(b) + p(r)$$

donde $p(b)$ = probabilidad de que sea blanca

$p(r)$ = probabilidad de que sea roja

de manera que

$$p = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

CONTEO POR COMBINACIONES

Ejemplo 10: Una persona toma dos cartas del mazo de la baraja, una tras de otra. ¿Cuál es la probabilidad de que sean un par de ases?

Solución: Puede resolverse este ejemplo de dos formas: una, por combinaciones; la otra, por sucesos dependientes.

Por combinaciones: El número de formas de sacar dos *ases* es ${}_4C_2$ y el número de maneras de sacar dos cartas del mazo es ${}_{52}C_2$, de manera que la probabilidad pedida es

$$p = \frac{{}_4C_2}{{}_{52}C_2}$$

$$p = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$$

Por sucesos dependientes: La probabilidad de que la primera carta sacada sea **as** es

$$p(a_1) = \frac{4}{52}$$

La probabilidad de que la segunda carta sacada sea **as**, considerando que la primera carta fue **as** y que no se devolvió, es

$$p(a_2) = \frac{3}{51}$$

de manera que la probabilidad pedida es

$$p(aa) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{12}{2652}$$

$$p(aa) = \frac{1}{221}$$

que es el mismo resultado obtenido por el otro método.

8.3 COMPLEMENTO

Si en probabilidad el 1 representa el todo, éste viene siendo la suma de la probabilidad de éxito más la probabilidad de fracaso, o sea la probabilidad de que sí suceda más la probabilidad de que no suceda. Se dice entonces que el éxito y el fracaso son complementarios porque cualquiera de ellos es lo que le falta al otro para el 1, o sea para el todo. Por lo tanto:

$$p(e) + p(f) = 1$$

en donde $p(e)$ = probabilidad de éxito;
 $p(f)$ = probabilidad de fracaso.

o sea que $p(e) = 1 - p(f)$

En otras palabras, la probabilidad de que suceda algo puede obtenerse a través del complemento restando a 1 la probabilidad de que no suceda, o lo contrario a lo pedido. A veces, no siempre, es más sencillo recurrir al complemento para calcular alguna probabilidad.

Ejemplo 11: Se ponen en una urna 4 fichas blancas, 3 negras y 6 rojas. Se sacan dos, una después de la otra sin devolver a la urna la primera sacada. Calcular la probabilidad de que sean blancas o rojas las dos,

- en forma directa por sucesos dependientes y excluyentes;
- en forma directa por combinaciones;
- en forma indirecta por el complemento.

Solución: a) La conjunción “o” es el indicativo de que se trata de sucesos excluyentes (se suman); a su vez, los eventos blanca-blanca son dependientes, lo mismo roja-roja. Por lo tanto:

$$p = \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} + \frac{6}{13} \times \frac{5}{12}$$

primera blanca $\frac{4}{13}$
segunda blanca $\frac{3}{12}$
segunda roja $\frac{5}{12}$
primera roja $\frac{6}{13}$

$$P(\text{BB o RR}) = \frac{7}{26}$$

b) **Por combinaciones:** Aplicando la fórmula básica de probabilidad $p = \frac{q}{r}$, en donde

q significa el número de maneras de tomar dos fichas blancas entre cuatro que hay y r significa el número de maneras de tomar dos fichas entre trece que hay; lo mismo para las fichas rojas, entonces

$$p(\text{BB o RR}) = \frac{{}_4C_2}{{}_{13}C_2} + \frac{{}_6C_2}{{}_{13}C_2} = \frac{7}{26}$$

c) **Por el complemento:** Al sacar dos fichas, una tras de la otra, el espacio muestral o evento general, o sea todas las posibilidades son:

B-B	B-N	B-R	N-N	N-B
N-R	R-R	R-B	R-N	

de las cuales **B-B** y **R-R** son éxito y las otras siete son fracaso. El complemento son estas siete. La probabilidad de **{B-B o R-R}** es entonces

$$p(\text{BB o RR}) = 1 - p(\text{BN}) - p(\text{BR}) - p(\text{NN}) - p(\text{NB}) - p(\text{NR}) - p(\text{RB}) - p(\text{RN})$$

$$= 1 - \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} - \frac{4}{13} \times \frac{6}{12} - \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} - \frac{3}{13} \times \frac{4}{12} - \frac{3}{13} \times \frac{6}{12} - \frac{6}{13} \times \frac{4}{12} - \frac{6}{13} \times \frac{3}{12}$$

$$p(\text{BB o RR}) = \frac{7}{26}$$

Nótese que en los tres incisos la solución fue la misma. En este ejemplo llegar a la solución por el complemento fue más laborioso que directamente; sin embargo, el objetivo de este ejemplo es aprender el procedimiento a través del complemento porque en muchos problemas es más sencillo.

8.4 PROCESOS ESTOCÁSTICOS FINITOS

Hay veces que se desea calcular la probabilidad de un solo suceso, como en el caso de los ejemplos anteriores; sin embargo, también existen ocasiones en que se requiere obtener la probabilidad de una secuencia de eventos consecutivos, uno tras otro. A esto se le llama *procesos estocásticos*¹ *finitos*.

¹ Del griego *stochasticós* = casual.

REGLA PARA CONSTRUIR DIAGRAMAS DE ÁRBOL:

1. *Todos los primeros eventos deben quedar bien alineados en la misma columna (verticalmente); todos los segundos eventos deben quedar bien alineados en la misma columna (verticalmente), y así sucesivamente.*
2. *De evento a evento debe procurarse que queden igualmente espaciados.*
3. *Poner al término de cada rama alguna letra o algún número que sea*

Ejemplo 1: Dos equipos **A** y **B** juegan un torneo de fútbol. El torneo acaba cuando un equipo gane dos juegos en total. Dibujar el diagrama de árbol que muestre todas las formas en que puede verificarse el torneo.

Solución:

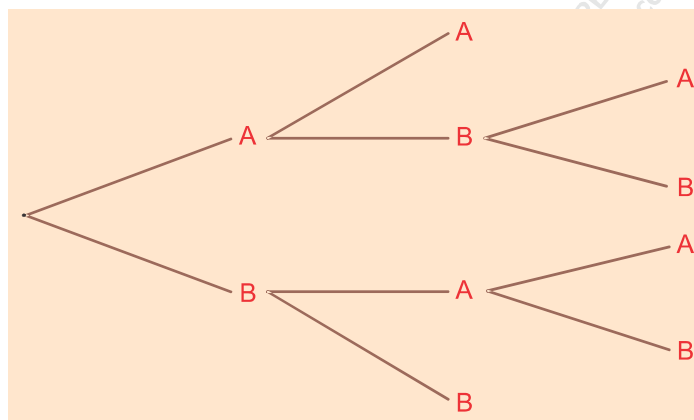


figura 8.2

Ejemplo 2: Dos equipos **A** y **B** juegan un torneo de fútbol. El torneo acaba al cuarto juego o bien cuando un equipo gane dos juegos consecutivos. Dibujar el diagrama de árbol que muestre todas las formas en que puede verificarse el torneo.

Solución:

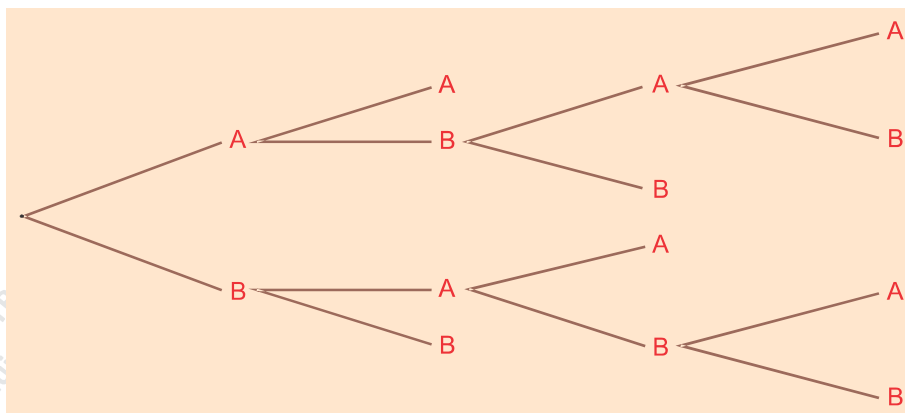


figura 8.3

Ejemplo 3: Un hombre entra a un casino a apostar. Cada vez apuesta \$1000.00 y comienza con \$2000.00. Se retira cuando pierda todo, cuando vuelva a quedar a mano o después de la cuarta vez que juega. Construir el diagrama de árbol que muestre las formas en que puede concluir sus apuestas.

Solución:

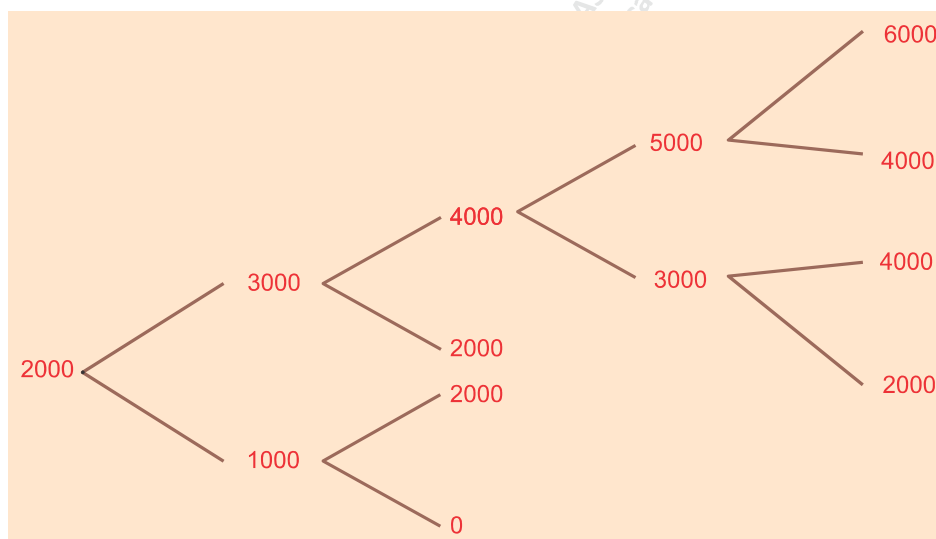


figura 8.4

Ejemplo 4: En el siguiente diagrama, sean **A, B, C, ... F**, pueblos y las líneas que los conectan, carreteras (figura 8.5). Comenzando en **A**, se puede viajar de un pueblo a otro a través de cualquier carretera a condición de que no se viaje dos veces por la misma carretera. En ese momento concluye el viaje. Construir el diagrama de árbol que muestre las formas en que puede acabar el viaje.

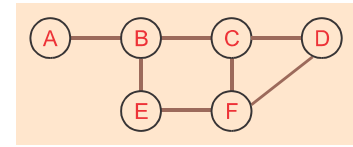


figura 8.5

Solución:

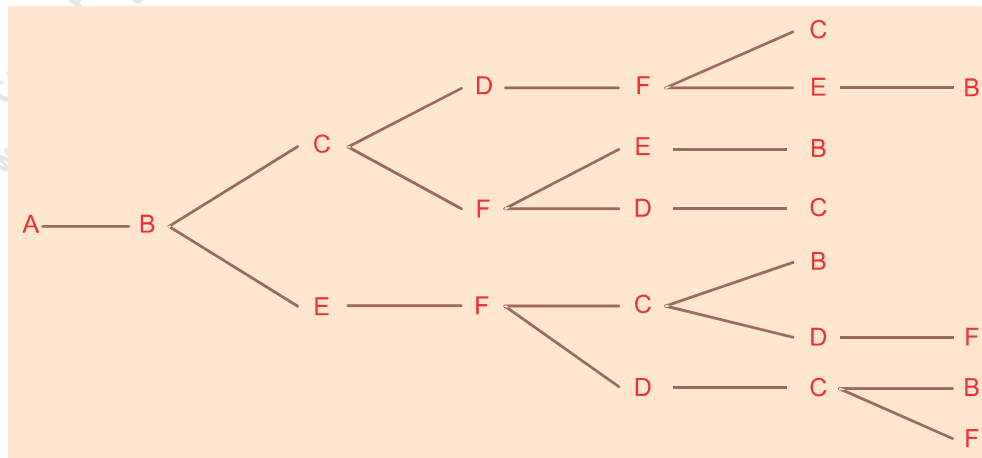


figura 8.6

APLICACIÓN A LA PROBABILIDAD

Cuando se utiliza como recurso el diagrama de árbol para el cálculo de probabilidad, se pone a la mitad de cada rama la probabilidad que corresponde a ese evento para facilitar su visualización a la hora de hacer los cálculos.

Cada rama representa un evento excluyente, porque sucede una u otra, pero no dos al mismo tiempo, por lo que deben sumarse sus probabilidades respectivas. Por otra parte, los eventos que componen cada rama, es decir, sus trayectos desde el origen hasta la punta final, son sucesos dependientes, pues depende de que suceda el primero para que acontezca el siguiente, por lo que deben multiplicarse sus probabilidades.

Ejemplo 5: Se tienen dos cajas de la siguiente manera: La caja **A** contiene tres fichas verdes y ocho blancas; la caja **B** contiene nueve fichas verdes y cinco blancas. Se lanza un dado, si sale con la cara 1 ó 2 se toma la caja **A** y se saca una ficha de allí; si sale 3, 4, 5 ó 6 se toma la caja **B** y se extrae una ficha. Calcular la probabilidad de que la ficha extraída sea verde.

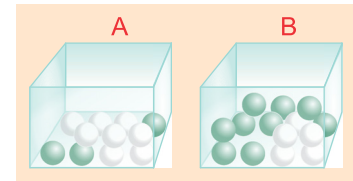


figura 8.7

Solución: Se construye el diagrama de árbol que corresponda a los eventos del enunciado del problema (ver figura 8.8). Las ramas que terminan en verde (**v** = verde) son las que señalan los casos en que la ficha extraída fue verde.

Como puede verse en la figura 8.8, existen dos ramas que llevan al evento pedido (**v**). Cada rama es un evento excluyente, porque sucede una o sucede la otra, pero jamás ambas al mismo tiempo, por lo que deben sumarse sus probabilidades; a su vez, para el trayecto desde el inicio hasta el final de cada rama, las probabilidades marcadas son dependientes, por lo que deben multiplicarse, según se explicó en las páginas 55 y 56.

De manera que la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{1}{3} \times \frac{3}{11} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{14}$$

$$p = \frac{40}{77}$$

o bien $p = 0.5194$

que equivale a $p = 51.94 \%$

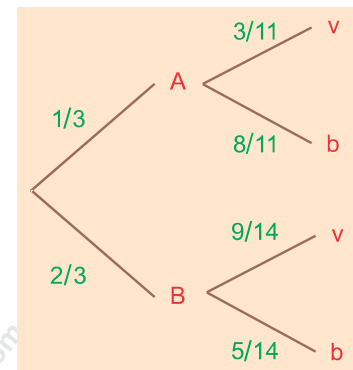


figura 8.8

Ejemplo 6: Se tienen dos cajas de la siguiente manera: La caja **A** contiene cuatro fichas verdes y siete blancas; la caja **B** contiene nueve fichas verdes y cinco blancas. Se lanza un dado, si sale 1 ó 2 se toma la caja **A** y se sacan dos fichas de allí, una tras de la otra sin devolver la primera a la caja; si sale 3, 4, 5 ó 6 se toma la caja **B** y se sacan dos fichas de allí, una tras de la otra sin devolver la primera a la caja. Calcular la probabilidad de que la segunda ficha extraída sea de color verde.

Solución: Se construye el diagrama de árbol que corresponda a los eventos del enunciado del problema (ver figura 8.9). Las ramas que terminan en verde (v) son las que señalan los casos en los que la segunda ficha extraída fue verde.

Como puede verse en la figura 8.9, existen cuatro ramas que llevan al evento pedido (v). Cada rama es un evento excluyente, porque sucede una o sucede la otra, pero jamás ambas al mismo tiempo, por lo que deben sumarse sus probabilidades; a su vez, para el trayecto desde el inicio hasta el final de cada rama, las probabilidades marcadas son dependientes, por lo que deben multiplicarse.

En consecuencia la probabilidad pedida es:

$$p = \frac{1}{3} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{11} \times \frac{4}{10} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{14} \times \frac{8}{13} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{14} \times \frac{9}{13}$$

$$p = \frac{127}{231}$$

o bien

$$p = 0.5497$$

que equivale a

$$p = 54.97\%$$

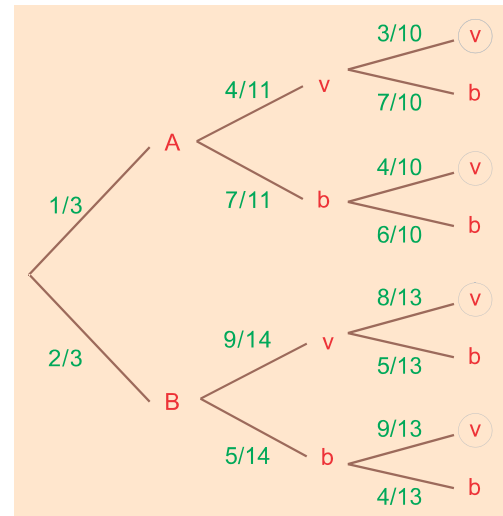


figura 8.9

EJERCICIO 8.1

- 1) Se tiene un grupo de 10 niños y 12 niñas. Si se escogen tres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que las tres sean niñas?

- 2) Se tiene un grupo de 11 niños y 13 niñas. Si se escogen cuatro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro sean del mismo sexo?

- 3) Se tienen tres cajas como sigue:

La caja **A** tiene 6 focos buenos y 4 malos;

la caja **B** tiene 5 focos buenos y 5 malos;

la caja **C** tiene 3 focos buenos y 7 malos.

Se lanza un dado, si sale 1 se toma la caja **A**, si sale 2 ó 3 se toma la caja **B** y si sale 4, 5 ó 6 se toma la caja **C**. A continuación se extrae un foco de la caja seleccionada. Calcular la probabilidad de que el foco sea bueno.

- 4) Se tienen tres cajas de la siguiente forma:

La caja **A** tiene 6 focos buenos y 4 malos;

la caja **B** tiene 5 focos buenos y 5 malos;

la caja **C** tiene 3 focos buenos y 7 malos.

Se selecciona una caja y se toma un foco de allí. Si es un foco bueno se pone en la siguiente caja, si es malo se pone en la anterior. Se saca ahora un foco de la caja donde se depositó el anterior. Calcular la probabilidad de que éste último sea bueno.

NOTA: Se entiende por “siguiente” lo que continúa a la derecha según este orden: **A-B-C-A-B-C** ; se entiende por “anterior” la caja que queda inmediatamente a la izquierda según el orden antes mostrado.

- 5) Se tienen tres de la manera siguiente:

La caja **A** tiene 6 focos buenos y 4 malos;

la caja **B** tiene 5 focos buenos y 5 malos;

la caja **C** tiene 3 focos buenos y 7 malos.

Se selecciona una caja y se toma un foco de allí. Si es un foco bueno se junta el contenido de esa caja incluido el sacado con la siguiente, si es malo se junta el contenido de esa caja con la anterior. Se saca a continuación un foco de la nueva caja donde se juntaron. Calcular la probabilidad de que éste último sea bueno.

NOTA: Se entiende por “siguiente” lo que continúa a la derecha según este orden: **A-B-C-A-B-C** ; se entiende por “anterior” la caja que queda inmediatamente a la izquierda según el orden antes mostrado.

- 6) Se tienen dos cajas como sigue:

La caja **A** contiene 2 fichas rojas, 3 blancas y 4 negras;
la caja **B** tiene 1 ficha roja, 4 blancas y 2 negras.

Se lanza un dado, si sale 1 ó 2 se saca una ficha de la caja **A**, si sale 3, 4, 5 ó 6 se saca una ficha de la caja **B**. Si la ficha sacada es roja, se vuelve a sacar otra de allí mismo sin devolver la anterior hasta que no sea roja; si es blanca o negra, se detiene el proceso. Calcular la probabilidad de que la ficha que detenga el proceso sea blanca.

- 7) Se ha visto que un jugador de baloncesto cada vez que lanza la pelota al aro desde un punto determinado encesta ocho veces de cada diez tiros. Tiene que hacer lo siguiente: Desde el mismo punto tiene que tirar, si encesta tiene oportunidad de volver a hacer otro tiro hasta un máximo de cuatro lanzamientos con la facilidad de que si acierta dos veces seguidas tendrá oportunidad de volver a tirar si falla en la siguiente inmediata. Si falla se retira de la jugada, a excepción de que acierte dos veces seguidas. Calcular la probabilidad de que llegue al cuarto y último lanzamiento.
- 8) Se arrojan tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres caigan con el mismo número hacia arriba?
- 9) Se arrojan tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres caigan con números diferentes?
- 10) Se arrojan tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que dos caigan con números iguales y el otro diferentes?
- 11) De una baraja corriente se extraen dos cartas, una tras la otra. Calcular la probabilidad de que ambas sean rojas.
- 12) De una baraja corriente se extraen tres cartas, una tras la otra. Calcular la probabilidad de que dos sean del mismo color y la otra diferente.

8.5 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Es la probabilidad de un evento **A** (la consecuencia) cuando se sabe que ya ocurrió otro **B** (la causa o condición) con el cual está relacionado. Esto se escribe

$$P(A | B)$$

y se lee: *La probabilidad de A dado que ocurrió B*. Su equivalente es interpretar el enunciado como *la probabilidad de A si ocurrió B*. O también como *después de ocurrir B la probabilidad de ocurrencia de A*. La conjunción “si” es un condicionante, por eso se llama probabilidad condicional.

Evidentemente, ambos eventos no deben ser excluyentes.

Por ejemplo, en un hospital varias personas están siendo revisadas en rayos X y otras están en cirugía. En cualquiera de las situaciones, unos son por accidente automovilístico y otros por caídas. Se podría querer saber la probabilidad de que al escoger una persona de rayos X esté allí por haber sufrido un accidente automovilístico.

La causa de que esa persona esté en rayos X es el accidente automovilístico que sufrió. Se diría, según la fórmula líneas arriba, *la probabilidad de estar en rayos X dado que le ocurrió un accidente automovilístico*. Lo que debe entenderse es la forma condicionada de estar en rayos X al hecho de haber sufrido accidente, porque hay otras personas en rayos X que están por haberse caído. El “*dado que*” puede sustituirse por la conjunción condicional “*si*” para que quede más evidente lo condicionado, quedando el enunciado así: *la probabilidad de estar en rayos X si le ocurrió un accidente automovilístico*.

Este ejemplo visto con números puede resultar más claro. Supóngase que en el hospital hay en total 33 pacientes. De ellos, 16 están en rayos X y 17 están en cirugía. Ahora bien, de los 16 de rayos X, 12 están por un accidente automovilístico y 4 por haber sufrido una caída grave, mientras que de los 17 que están en cirugía, 10 están por accidente automovilístico y 7 por una caída grave.

Lo anterior se sintetiza en el cuadro siguiente:

	rayos x	cirugía	TOTAL
accidente automovilístico	12	10	22
caída grave	4	7	10
TOTAL	16	17	33

El director del hospital selecciona un expediente al azar. ¿Cuál será la probabilidad de que pertenezca a un paciente que esté en cirugía?

Solución: Como hay 33 pacientes en total y 17 en cirugía la probabilidad **no** está condicionada y simplemente es

$$P(c) = \frac{17}{33}$$

Pero cuando ya que tiene el expediente en sus manos, que resultó de cirugía según el párrafo anterior, ahora la nueva pregunta que se plantea es ¿Cuál es la probabilidad de que el expediente escogido sea de alguien que sufrió un accidente automovilístico? Aquí el evento que ya ocurrió es que el expediente fue de los que están en cirugía, por lo que en términos de la probabilidad condicional se enunciaría así: *Si se escoge un expediente ¿Cuál es la probabilidad de que el expediente pertenezca a alguien que sufrió un accidente automovilístico dado que está en cirugía?* O lo que es lo mismo, para incluir la conjunción condicional “**si**” en el enunciado se puede redactar de esta otra forma: *¿Cuál es la probabilidad de que el expediente seleccionado pertenezca a un accidentado de auto si está en cirugía?*” Pero hay que ver el cuadro anterior que los que están en cirugía pueden ser por accidente automovilístico o por caída grave.

Entonces, como en cirugía en total hay 17 de los cuales 10 son por accidente automovilístico, la probabilidad es

$$P(\text{accidente}) = \frac{10}{17}$$

A esto es a lo que se refiere la probabilidad condicional. La pregunta anterior planteada en términos de probabilidad condicional sería: “¿Cuál es la probabilidad de que el expediente seleccionado pertenezca a un accidentado de auto dado que está en cirugía?”

Para poder plantear esta última pregunta tuvo que ocurrir que el expediente fuese de cirugía. Por esa razón la definición inicial de Probabilidad Condicional, recordándola, dice: *Es la probabilidad de un evento A cuando se sabe que ya ocurrió otro B* . O para ponerla en términos de la conjunción condicional “si” podría redactarse como *Es la probabilidad de un evento A si ocurrió el evento B* .

Como la fórmula de la probabilidad condicional contiene el concepto de intersección, entonces recordando de la teoría de conjuntos, la **intersección** entre dos conjuntos lo forman todos los elementos que están simultáneamente en el conjunto A y en el conjunto B , que se escribe $A \cap B$. En la figura 8.10 la región de color negro representa a la intersección.

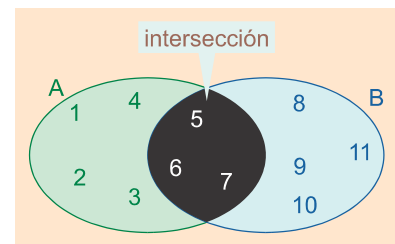


figura 8.10

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$A \cap B = \{5, 6, 7\}$$

La fórmula de la probabilidad condicional es

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En la fórmula anterior, el espacio muestral total queda reducido al espacio muestral de B , es decir al evento que ha ocurrido. En muchos casos la construcción de una **tabla de contingencia** facilita bastante la obtención de los datos requeridos para la fórmula. En los ejemplos siguientes se mostrará lo que es una tabla de contingencia.

Ejemplo 1: En un sanatorio 19 personas en total están siendo revisadas en rayos X, de las cuales 7 son por caídas graves; además 6 en total están en cirugía. De las personas internadas en el sanatorio, 16 en total son por accidente automovilístico y 9 en total por caídas graves. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una persona esté en rayos X dado que sufrió un accidente automovilístico?

Solución: En este caso el evento A es escoger un paciente de rayos X y el evento B (el que se da por ocurrido, o sea la condición) es haber sufrido accidente automovilístico.

El enunciado de la pregunta puede expresarse como *probabilidad de estar en rayos X dado que sufrió accidente automovilístico*. Construyendo una *tabla de contingencia* parcial con los datos del enunciado se tendría la tabla de esta manera:

Concepto	accidente automovilístico	caída grave	Total
rayos X		7	19
cirugía			6
Total	16	9	25

Analizando esta tabla lo primero que puede verse es que en el sanatorio hay en total 25 personas. Obsérvese que el total vertical como el horizontal deben coincidir.

El siguiente paso es llenar la tabla parcial anterior para dejar la *tabla de contingencia* completa. Lo primero es completar la columna de caídas por una simple resta o bien, completar la fila de rayos X. Hecho eso la celda restante por una simple resta se obtendrá su valor. Aquí se está marcando con fondo más oscuro la intersección de las dos variables que se mencionan en el enunciado.

Concepto	accidente automovilístico	caída	Total
rayos X	12	7	19
cirugía	4	2	6
Total	16	9	25

Los datos son los siguientes, tomando en cuenta que el espacio muestral (el denominador) queda reducido al total de accidentes porque ésta es la variable que se da por ocurrida o la condicionante:

$$A \cap B = 12$$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{25}$$

$$P(B) = \frac{16}{25}$$

Por lo tanto la probabilidad pedida es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{12}{\cancel{25}}}{\frac{16}{\cancel{25}}} = \frac{12}{16}$$

$$P(A|B) = 75\%$$

Como cuando se usan estas tablas de contingencia, al emplear la fórmula de probabilidad condicional por la ley de la herradura siempre se van a simplificar los denominadores de arriba y de abajo, se acostumbra directamente poner solamente el 12 y el 16, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: En un sanatorio 19 personas en total están siendo revisadas en rayos X, de las cuales 7 son por caídas; además 6 en total están en cirugía. De las personas internadas en el sanatorio, 16 en total son por accidente automovilístico y 9 en total por caídas. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una persona haya sufrido un accidente automovilístico si está siendo atendida en rayos X?

Solución: Aparentemente este problema es igual al anterior, pero no. Obsérvese que se cambió la condición o causa por la consecuencia. En este caso el evento **A** (evento del que se investiga su probabilidad) es escoger un paciente por accidente y el evento **B** (el que se da por ocurrido, o sea la condición) es estar en rayos X.

Entonces conforme a la fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

en donde el espacio muestral (el denominador) queda reducido ahora al total de los que están en rayos X, porque ésta es la variable que se da por ocurrida. Los datos son los siguientes:

$$A \cap B = 12$$

$$P(A) = 19$$

Por lo tanto

$$P(B | A) = \frac{12}{19}$$

$$P(B | A) = 63.15\%$$

Ejemplo 3: En un examen de admisión en cierta escuela se presentaron en total 134 estudiantes. De ellos, 66 eran hombres y 20 lo reprobaron mientras que 53 mujeres lo aprobaron. Si se selecciona al azar un examen

- a) si es de las mujeres, ¿Cuál es la probabilidad que pertenezca a una reprobada?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a un hombre?

Solución: La *tabla de contingencia* preliminar que se puede construir es la siguiente:

Concepto	hombres	mujeres	Total
aprobados		53	
reprobados	20		
Total	66		134

la cual puede ser completada fácilmente buscando primero las filas o columnas a las que les haga falta un solo dato. En este caso la columna de los hombres y la fila de los totales horizontal. Continuando con este proceso la tabla de contingencia completa es la siguiente:

Concepto	hombres	mujeres	Total
aprobados	46	53	99
reprobados	20	15	35
Total	66	68	134

- a) Si es de las mujeres, el espacio muestral (denominador) es 68 y la intersección de mujeres con reprobados es 15, así que

$$A \cap B = 15$$

$$P(B) = 68$$

Nótese que estos dos datos anteriores no están dados en el enunciados y para obtenerlos fue necesario completar la tabla de donde se extrajeron.

o sea que la probabilidad pedida es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{15}{68}$$

$$P(A|B) = 22.05\%$$

- b) Este inciso no está condicionado, así que simplemente la probabilidad de que pertenezca a un hombre es

$$P(h) = \frac{66}{134}$$

$$P(h) = 49.25\%$$

Ejemplo 4: De un total de 98 estudiantes de idiomas, 19 estudian solamente francés, 25 estudian solamente inglés, 21 estudian solamente alemán, 10 estudian francés e inglés, 11 estudian inglés y alemán, 9 estudian francés y alemán, y solamente 3 estudian los tres idiomas.

- a) Si se selecciona un estudiante que estudie francés, ¿cuál es la probabilidad de que estudie también alemán?
- b) Si se selecciona un estudiante que estudie inglés y alemán, ¿cuál es la probabilidad de que estudie los tres idiomas?

Solución: En este caso lo que conviene es hacer un diagrama de conjuntos como el mostrado en la figura 8.11.

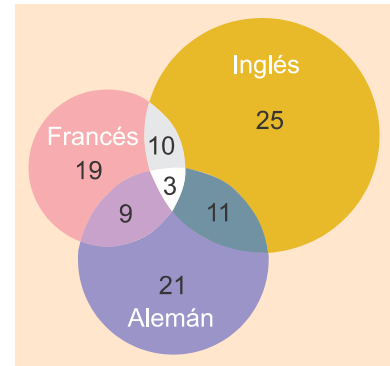


figura 8.11

- a) La condición es que es que estudie francés, por lo tanto ese es el espacio muestral (denominador). Es importante tomar en cuenta que el enunciado no dice que solamente estudie francés, simplemente que estudie francés, por lo tanto el número de estudiantes que estudian francés es

$$B = 19 + 10 + 3 + 9$$

$$B = 41$$

Por otra parte, la intersección de francés con alemán es

$$\text{francés} \cap \text{alemán} = 12$$

de tal manera que

$$P(A|B) = \frac{12}{41}$$

$$P(A|B) = 24.26\%$$

- b) La condición es que estudie inglés y alemán, por lo tanto ese es el espacio muestral (denominador). Nuevamente es importante tomar en cuenta que el enunciado no dice que solamente estudien inglés y alemán, simplemente que estudien inglés y alemán, por lo tanto el número de estudiantes que estudian ambos idiomas es

$$B = 11 + 3$$

$$B = 14$$

Por otra parte, la intersección de los tres idiomas es

$$\text{frances} \cap \text{inglés} \cap \text{alemán} = 3$$

por lo tanto

$$P(A|B) = \frac{3}{14}$$

$$P(A|B) = 21.42\%$$

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

EJERCICIO 8.2

- 1) En una tienda hay artículos económicos y otros de lujo, unos son de plástico y otros de madera. De ellos, 25 son económicos de plástico y 30 económicos de madera. En total hay 80 artículos de lujo y 70 de madera. Si se selecciona un artículo, ¿cuál es la probabilidad de que sea de lujo si es de plástico?
- 2) En el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que sea de madera si es de los económicos?
- 3) En un pequeño poblado de 53 habitantes hubo una catástrofe natural que dejó 18 fallecidos, de los cuales 6 eran hombres adultos y 7 eran mujeres adultas, quedando vivos 10 mujeres adultas y once niños(as), además de algunos hombres adultos. Si se selecciona al azar uno cualquiera de los 53 habitantes del poblado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un hombre adulto si es de los sobrevivientes?
- 4) En el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que el seleccionado sea un niño(a)?
- 5) En el problema 3, ¿cuál es la probabilidad de que el seleccionado sea un fallecido si el escogido es un niño(a)?
- 6) En el problema 3, ¿cuál es la probabilidad de que el seleccionado sea una mujer adulta?
- 7) De un total de 207 enfermos, 106 padecen solamente gripe, 27 solamente salmonelosis y 45 solamente por miopía. De ellos, 7 están agripados y también tienen salmonelosis, 9 agripados y con miopía, 8 de los que padecen salmonelosis también tienen miopía, y algunos otros tienen las tres enfermedades. Si el director del centro médico escoge un expediente al azar y resulta de un paciente con salmonelosis ¿qué probabilidad existe de que el expediente pertenezca a un paciente con las tres enfermedades?
- 8) En el problema anterior, si se selecciona un paciente con gripe, ¿cuál es la probabilidad de que el expediente pertenezca a un paciente que también padezca miopía?

8.6 PROBABILIDAD DE LA UNIÓN DE DOS EVENTOS

Sean **A** y **B** dos eventos cualesquiera.

La unión de dos eventos **A** y **B** significa que sucede cualquiera de los dos **A** o **B**. Puede identificarse desde el enunciado porque se une un evento con el otro a través de la conjunción disyuntiva “o”.

Realmente se dan dos casos en los eventos con la unión:

- a) Cuando entre ellos no existe una intersección, o sea nada en común. Se trata de eventos mutuamente excluyentes vistos al inicio. Su probabilidad se calcula simplemente con la suma de ambas probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo: En un mostrador de una tienda hay 10 refrescos, 7 lápices, 15 borradores y 13 botones. Si una persona escoge 1 artículo, ¿cuál es la probabilidad de que sea un refresco o un botón?

Solución: La conjunción disyuntiva “o” hace ver que se trata de una unión y, además, como no existe nada en común entre ellos son dos eventos mutuamente excluyentes. Así que

$$\begin{aligned} P(\text{refresco}) + P(\text{botón}) &= \frac{10}{45} + \frac{13}{45} \\ &= \frac{23}{45} = 51.11\% \end{aligned}$$

- b) Cuando entre ellos existe una intersección, o sea algo en común; ese algo en común es una intersección y su probabilidad se calcula con la fórmula

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Esa resta que aparece al final de la fórmula anterior es fácil de comprenderla porque se trata de elementos que fueron calculados dos veces, una vez con A y la otra con B, ya que la unión por pertenecer a una intersección esos elementos están en ambos conjuntos.

Ejemplo 1: En un examen en cierta escuela lo presentaron en total 34 estudiantes. De ellos, 16 eran hombres y 7 lo reprobaron mientras que 13 mujeres lo aprobaron. Si se selecciona al azar un examen

- Calcular la probabilidad de que sea un examen aprobado o que sea de una mujer.
- Calcular la probabilidad de que se haya escogido un examen de un hombre o de algún estudiante cualquiera que haya reprobado.

Solución: La *tabla de contingencia* preliminar que se puede construir es la siguiente:

Concepto	hombres	mujeres	Total
aprobados		13	
reprobados	7		
Total	16		34

la cual puede ser completada fácilmente buscando primero las filas o columnas a las que les haga falta un solo dato. En este caso la columna de los hombres y la fila de los totales horizontal. Continuando con este proceso la tabla de contingencia completa es la siguiente:

Concepto	hombres	mujeres	Total
aprobados	9	13	22
reprobados	7	5	12
Total	16	18	34

- La intersección de aprobados con mujeres es 13. Por lo tanto, aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned}
 P(a \cup m) &= P(a) + P(m) - P(a \cap m) \\
 &= \frac{22}{34} + \frac{18}{34} - \frac{13}{34} \\
 P(a \cup m) &= \frac{27}{34}
 \end{aligned}$$

$$P(a \cup m) = 79.41\%$$

b) La intersección de hombres con reprobados es 7. Por lo tanto, aplicando la fórmula:

$$P(h \cup r) = P(h) + P(r) - P(h \cap r)$$

$$= \frac{16}{34} + \frac{12}{34} - \frac{7}{34}$$

$$P(h \cup r) = \frac{21}{34}$$

$$P(h \cup r) = 61.76\%$$

EJERCICIO 8.3

- 1) En una tienda se venden muchos artículos, entre los cuales se tienen 14 trituradoras de café eléctricos y 10 que son manuales; hay 12 sacapuntas eléctricos y otros que son manuales; también hay 24 desatornilladores en total de los cuales 18 son manuales y los demás son eléctricos. Los artículos manuales de entre los tres citados en total son 40. Si se escoge un artículo al azar,
- a) Hallar la probabilidad de que sea un sacapuntas o un objeto manual.
 - b) Hallar la probabilidad de que sea un objeto eléctrico o un desatornillador.
 - c) Hallar la probabilidad de que sea una trituradora de café o un sacapuntas.
- 2) En una ciudad existen cuatro terminales de autobuses que son la terminal del Norte, la del Sur, la del Oriente y la del Poniente. En cada terminal hay cuatro líneas de autobuses, la Línea Amarilla, la Roja, la Café y la Verde. Cada día salen en total 300 autobuses distribuidos de la siguiente forma: de la terminal del Norte salen 18 autobuses de la Línea Amarilla, 16 Rojas, algunas Cafés y 24 Verdes. De la terminal del Sur en total salen 79 autobuses distribuidos de la siguiente forma: salen 23 Amarillas, 25 Rojas, 19 Cafés y algunas Verdes. De la terminal del Oriente salen 15 Amarillas, algunas Rojas, 22 Cafés, 18 Verdes y en total de todas sus líneas tiene 73 salidas. Y de la terminal del Poniente salen algunas Amarillas, 21 Rojas, 17 Cafés, 19 Verdes y en total de todas sus líneas tiene 76 salidas. Si se selecciona un autobús, calcular la probabilidad
- a) de que sea de la terminal del Norte o que sea de la línea Café.
 - b) de que sea de la terminal del Sur o que sea de la línea Verde.
 - c) de que sea de la terminal del Oriente o que sea de la línea Roja.
 - d) de que sea de la terminal del Poniente o que sea de la terminal del Norte.
 - e) de que sea de la línea Amarilla o de la línea Café.

8.7 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD BINOMIAL

Es un proceso de muestreo con una distribución de probabilidad discreta que reúne las siguientes características:

- a) En cada ensayo u observación solamente son posibles dos resultados mutuamente excluyentes, llamados *éxito* y *fracaso*.
- b) Los resultados de la serie de ensayos u observaciones constituyen **eventos independientes**. Ningún resultado obtenido debe influir en el resultado siguiente.
- c) La probabilidad de éxito de cada ensayo, indicada por p , es constante de un ensayo a otro.

La fórmula para calcular la probabilidad de una distribución de probabilidad binomial es:

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x} \quad (2)$$

en donde

n = número total de ensayos

x = número de éxitos

p = probabilidad de éxito de cada ensayo

q = probabilidad de fracaso de cada ensayo

Ejemplo 1: Se lanza una moneda seis veces. Calcular la probabilidad de que en dos de las veces salga águila.

Solución: En este caso, el número de eventos es $n = 6$; el número de éxitos es $x = 2$; la probabilidad de éxito de cada ensayo es $p = 0.5$; y la probabilidad de fracaso de cada ensayo es

$$q = 1 - p = 1 - 0.5 = 0.5 .$$

Sustituyendo en la fórmula (2) se obtiene que

$$p(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

$$p(2) = {}_6 C_2 (0.5)^2 (0.5)^{6-2}$$

$$p(2) = {}_6C_2 (0.5)^2 (0.5)^4$$

$$p(2) = 0.234$$

que también se puede escribir como

$$p(x = 2) = 0.234$$

Ejemplo 2: En el problema anterior, calcular la probabilidad de que salgan por los menos dos veces águila.

Solución: En este caso, la probabilidad pedida es la suma de la probabilidad de que salgan dos veces águila, más la probabilidad de que salgan tres veces águila, más la probabilidad de que salgan cuatro veces águila, más la probabilidad de que salgan cinco veces águila, más la probabilidad de que salgan seis veces águila, o sea

$$p(2 \leq x \leq 6) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6)$$

en donde

$$p(2) = {}_6C_2 (0.5)^2 (0.5)^4 = 0.23437$$

$$p(3) = {}_6C_3 (0.5)^3 (0.5)^3 = 0.3125$$

$$p(4) = {}_6C_4 (0.5)^4 (0.5)^2 = 0.23437$$

$$p(5) = {}_6C_5 (0.5)^5 (0.5)^1 = 0.09375$$

$$p(6) = {}_6C_6 (0.5)^6 (0.5)^0 = 0.01562$$

Por lo tanto, sumando

$$p(2 \leq x \leq 6) = 0.89061$$

o bien

$$p(x > 1) = 0.89061$$

en donde debe entenderse que $x > 1$ está acotado por el mismo enunciado del problema hasta el valor de seis. De otra manera sería incorrecto afirmar que “para equis mayores que uno” porque, por ejemplo, 8 es mayor que uno, pero no puede ser porque contradice el mismo enunciado.

Ejemplo 3: En el problema anterior, calcular la probabilidad de que salgan cuando mucho una vez águila.

Solución: En este caso, la probabilidad pedida es la suma de la probabilidad de que salgan cero veces águila más la probabilidad de que salga una vez águila, o sea

$$p(0 \leq x \leq 1) = p(0) + p(1)$$

en donde

$$p(0) = {}_6C_0 (0.5)^0 (0.5)^6 = 0.01562$$

$$p(1) = {}_6C_1 (0.5)^1 (0.5)^5 = 0.09375$$

Por lo tanto, sumando

$$p(0 \leq x \leq 1) = 0.10937$$

que también puede escribirse como

$$p(x < 2) = 0.10937$$

Ejemplo 4: Resolver el ejemplo 2 a partir de una conclusión que se puede obtener de los resultados del ejemplo 2 y del ejemplo 3.

Solución: Puede observarse que el ejemplo 2 y el ejemplo 3 juntos abarcan la totalidad de las posibilidades, por lo tanto la suma de las probabilidades es

$$\begin{aligned} p(2 \leq x \leq 6) + p(0 \leq x \leq 1) &= p(0 \leq x \leq 6) \\ &= 0.89061 + 0.10937 \\ &= 0.99998 \end{aligned}$$

que rigurosamente debería dar igual a uno, pero por algunos decimales que no se tomaron en cuenta no da exactamente uno, como era de esperarse. Entonces la conclusión es que si

$$p(0 \leq x \leq 1) + p(2 \leq x \leq 6) = 1$$

entonces

$$p(2 \leq x \leq 6) = 1 - p(0 \leq x \leq 1)$$

esto es que

$$p(2 \leq x \leq 6) = 1 - p(0) - p(1)$$

$$p(2 \leq x \leq 6) = 1 - {}_6C_0 (0.5)^0 (0.5)^6 - {}_6C_1 (0.5)^1 (0.5)^5$$

$$p(2 \leq x \leq 6) = 1 - 0.01562 - 0.09375$$

$$p(2 \leq x \leq 6) = 0.89063$$

que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 2.

A la parte contraria a la probabilidad pedida se le llama **complemento**, porque entre la probabilidad pedida y su contraria está el todo. Resolver un problema por este método se dice que se resuelve por el complemento.

Ejemplo 5: Una empresa informa que el 35% de sus cuentas por cobrar están vencidas. Si el contador toma aleatoriamente siete cuentas, calcular la probabilidad de que tres de ellas estén vencidas.

Solución: Primero debe entenderse que el contador toma siete cuentas entre todas las que hay en la empresa por cobrar, que abarcan las vencidas como las no vencidas. En este caso se tiene que $n = 7$, $x = 3$, $p = 0.35$; $q = 1 - 0.35 = 0.65$. Entonces

$$p(3) = {}_7C_3 (0.35)^3 (0.65)^{7-3}$$

$$p(3) = {}_7C_3 (0.35)^3 (0.65)^4$$

$$p(3) = 0.2678$$

Ejemplo 6: En un laboratorio de análisis clínicos se tiene el registro que cierto día acudieron 14 hombres y 18 mujeres. Si se escogen aleatoriamente 10 expedientes, calcular la probabilidad de que cuando mucho siete de ellos pertenezcan a mujeres.

Solución: Igual que en el problema anterior debe entenderse que los diez expedientes que se escogieron son del total de entre los hombres y mujeres. Primeramente se calcula la probabilidad de que un expediente cualquiera escogido sea de mujer:

$$p(\text{mujer}) = \frac{18}{32} = 0.5625$$

por lo tanto

$$q(\text{mujer}) = 1 - 0.5625 = 0.4375$$

la probabilidad pedida en este problema es

$$p(0 \leq x \leq 7) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + p(7)$$

y con el razonamiento hecho en el ejemplo 4, o sea por el complemento, se tiene que

$$\begin{aligned} p(0 \leq x \leq 7) &= 1 - p(8) - p(9) - p(10) \\ &= 1 - {}_{10}C_8 (0.5625)^8 (0.4375)^2 - {}_{10}C_9 (0.5625)^9 (0.4375)^1 - {}_{10}C_{10} (0.5625)^{10} (0.4375)^0 \end{aligned}$$

$$p(0 \leq x \leq 7) = 0.8858$$

Ejemplo 7: Se sabe que la probabilidad de que un cliente de una tienda de aparatos eléctricos aproveche cierta promoción especial es del 40%. Si se escogen siete clientes, hallar la probabilidad de que por lo menos uno aprovechen la promoción.

Solución: En este caso, $p = 0.40$ y $q = 1 - 0.40 = 0.60$. Lo que se pide es

$$p(0 \leq x \leq 1) = p(0) + p(1)$$

$$= {}_7C_0 (0.40)^0 (0.60)^7 + {}_7C_1 (0.40)^1 (0.60)^6$$

$$p(0 \leq x \leq 1) = 0.15862$$

EJERCICIO 8.4

- 1) Se tira un dado corriente cinco veces. Hallar la probabilidad de que aparezca el 3:
 - a) ninguna vez;
 - b) por lo menos dos veces;
 - c) cuando mucho dos veces.
- 2) El 20% de los pernos producidos por una máquina salen defectuosos. Determinar la probabilidad de que, entre 4 pernos elegidos al azar,
 - a) uno sea defectuoso;
 - b) todos estén en buenas condiciones.
- 3) En una universidad, por cada 100 estudiantes que ingresan, 40 solamente se titulan. Si se escogen 10 estudiantes al azar, calcular la probabilidad de que
 - a) ninguno se titule;
 - b) todos se titulen;
 - c) a lo sumo 4 se titulen.
- 4) Se lanzan dos dados al mismo tiempo. Calcular la probabilidad de que la suma de ambos dados sea nueve al realizar seis tiradas,
 - a) en dos de las tiradas;
 - b) al menos en dos de las tiradas.

- 5) A un supermercado entran 1500 clientes mientras dura una promoción de discos, de los cuales 450 aprovechan la oferta. Si se seleccionan al azar 20 clientes, determinar la probabilidad de que
- a) todos los seleccionados hayan aprovechado la oferta;
 - b) ninguna haya aprovechado la promoción;
 - c) cuando mucho el 10% la haya aprovechado.
- 6) La Procuraduría de Justicia, de cada cien automóviles robados, recupera en promedio 25. Encontrar la probabilidad de que de 15 autos robados el jueves anterior, recupere
- a) todos;
 - b) ninguno
 - c) por lo menos cinco.
- 7) Un estudio revela que el 70% de los pacientes que asisten a consultorios, previa cita, deben esperar de todos modos 30 minutos para ser atendidos por su médico. Obtener la probabilidad de que, entre diez pacientes seleccionados al azar, por lo menos cuatro deban esperar 30 minutos para ser atendidos.
- 8) Se observó que en 500 pacientes a quienes se les administró cierto medicamento, 75 de ellos se sintieron aletargados durante el día. Hallar la probabilidad de que entre catorce personas a quienes se les administró el medicamento
- a) a lo sumo cinco se sientan aletargadas;
 - b) por lo menos cinco se sientan aletargadas.
- 9) Un estudio demuestra que en cierta ciudad el 5% de las familias poseen dos automóviles. Hallar la probabilidad de que entre 16 familias seleccionadas al azar en dicha ciudad,
- a) ninguna tenga dos automóviles;
 - b) todas tengan dos automóviles.
 - c) exactamente 3 tengan dos automóviles.
- 10) Del mazo de una baraja corriente, se extrae una carta y se devuelve al mazo, repitiendo la operación diez veces. Hallar la probabilidad de que salga un As
- a) dos veces;
 - b) ninguna vez;
 - c) todas las veces.

8.8 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE POISSON

Es un proceso de muestreo relativas al número de eventos que ocurren en una unidad de tiempo, es decir, es un proceso que está en función del tiempo. Se trata de una distribución de probabilidad discreta.

La fórmula para calcular la probabilidad de una distribución de Poisson es:

$$P(x) = \frac{\mu^x}{x! e^\mu} \quad (3)$$

en donde

μ = promedio de eventos en unidad de tiempo.

x = número de eventos esperados por unidad de tiempo.

e = base de los logaritmos naturales

La unidad de tiempo del promedio μ debe ser homogénea con la unidad de tiempo empleada en el número de eventos esperados x .

Ejemplo 1: Se sabe que en cierta carretera pasan 27 automóviles en promedio por hora. Calcular la probabilidad de que hoy entre las 8 y 9 de la mañana pasen 22 automóviles..

Solución: En este caso, el promedio es 27 automóviles por hora, por lo tanto $\mu = 27$ y $x = 22$. De manera que sustituyendo en la fórmula (3), se obtiene

$$p(x = 22) = \frac{27^{22}}{22! e^{27}}$$

$$p(x = 22) = 0.0516$$

Ejemplo 2: En el problema anterior, calcular la probabilidad de que en la siguiente media hora pasen 13 automóviles.

Solución: Como el número de eventos esperados x está solicitado en media hora, entonces el promedio debe ajustarse a media hora también. Por lo tanto,

$$\mu = \frac{27}{2} = 13.5$$

$$x = 13$$

que sustituyendo en la fórmula (3) se obtiene

$$p(x = 13) = \frac{13.5^{13}}{13! \times e^{13.5}}$$

$$p(x = 13) = 0.1089$$

o simplemente puede escribirse como $p(13) = 0.1089$.

Ejemplo 3: En el problema anterior, calcular la probabilidad de que en las siguientes 2 horas pasen 39 automóviles.

Solución: Como el número de eventos esperados x está solicitado en dos horas, entonces el promedio debe ajustarse a dos horas también. Por lo tanto,

$$\mu = 27 \times 2 = 54$$

$$x = 39$$

que sustituyendo en la fórmula (3) se obtiene

$$p(x = 39) = \frac{54^{39}}{39! e^{54}}$$

$$p(x = 39) = 0.00633$$

Ejemplo 4: En un laboratorio se registran 98 estudios semanales en promedio. Calcular la probabilidad de que el próximo jueves haya cuando mucho tres estudios.

Solución: Que haya cuando mucho tres estudios significa que puede haber cero, uno, dos ó tres estudios. Por otra parte, 98 estudios en promedio a la semana equivale a $(98 \div 7) = 14$ al día, por lo tanto:

$$\begin{aligned} p(0 \leq x \leq 3) &= p(0) + p(1) + p(2) + p(3) \\ &= \frac{14^0}{0!e^{14}} + \frac{14^1}{1!e^{14}} + \frac{14^2}{2!e^{14}} + \frac{14^3}{3!e^{14}} \\ &= 0.0000008 + 0.00001164 + 0.00008148 + 0.0003802 \end{aligned}$$

$$p(0 \leq x \leq 3) = 0.000474$$

Ejemplo 5: En cierta oficina se reciben 17 llamadas telefónicas en promedio por hora. Calcular la probabilidad de que en la siguiente hora se reciban por lo menos dos llamadas.

Solución: En este caso resulta más sencillo hacerlo por el complemento, es decir,

$$\begin{aligned} p(x \geq 2) &= 1 - p(0) - p(1) \\ &= 1 - \frac{17^0}{0!e^{17}} - \frac{17^1}{1!e^{17}} \end{aligned}$$

$$p(x \geq 2) = 0.9999$$

Ejemplo 6: En la Cruz Roja se reciben 4 heridos en promedio al día. Calcular la probabilidad de recibir hoy desde cero hasta cuatro heridos, o sea, $p(0 \leq x \leq 4) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4)$.

Antes de hacer operaciones, ¿cuánto podría esperarse o predecirse que debe dar el resultado?

Solución:

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \frac{4^0}{0!e^4} + \frac{4^1}{1!e^4} + \frac{4^2}{2!e^4} + \frac{4^3}{3!e^4} + \frac{4^4}{4!e^4}$$

$$p(0 \leq x \leq 4) = 0.6288$$

Cuando se trata de predecir el resultado de este problema, la apariencia lleva a creer que debe dar uno, por suponer que si el promedio diario de heridos es de 4, entonces la suma desde cero hasta cuatro incluye el todo, pero no es así. Si el promedio es de 4 significa que algún día hubo 5, quizás hasta 6 ó 7 ó hasta más y estos últimos valores no fueron calculados. Si se calculan las probabilidades hasta 8 se obtiene

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + p(7) + p(8) = 0.9786$$

que ya es ahora sí casi uno.

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

EJERCICIO 8.5

- 1) En un laboratorio de patología, en promedio 4 pacientes acuden al día para realizarse un análisis de amibas. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo martes acudan máximo dos personas a realizarse dicho análisis?
- 2) En cierta librería se detecta que en promedio se reciben 18.9 pedidos de libros de recetas de cocina a la semana. ¿Cuál es la probabilidad de que al siguiente día 3 personas soliciten libros de ese contenido?
- 3) Una recepcionista recibe al día, en promedio, 4 llamadas equivocadas. ¿Cuál es la probabilidad de que en los dos siguientes días reciba máximo tres llamadas equivocadas?
- 4) Se realizó un control para detectar el número de veces que al mes dejaba de pasar el camión recolector de la basura, con los siguientes datos:

MES	NÚMERO DE DÍAS QUE DEJÓ DE PASAR
enero	2
febrero	0
marzo	6
abril	1
mayo	4
junio	0
julio	0
agosto	3
septiembre	3
octubre	2
noviembre	7
diciembre	5
enero	6

Calcular la probabilidad de que en el siguiente mes de marzo no pase 2 veces.

- 5) Si en una fábrica de telas se sabe que los cortes de energía eléctrica suceden uno cada tres meses, obtener la probabilidad de que en este año se den a lo más dos interrupciones.
- 6) En cierta ciudad se registra que el promedio de edad en que mueren las mujeres de cáncer es de 55 años. Hallar la probabilidad de que la siguiente mujer que muera de cáncer tenga 60 años.
- 7) En un banco se tiene registrado que mensualmente el número de tarjetas de crédito olvidadas adentro del cajero automático son cinco en promedio. Calcular la probabilidad de que para la próxima semana se olviden mínimo dos tarjetas.
- 8) En un hospital de maternidad el número de nacimientos promedio al mes es de 7.84. Calcular la probabilidad de que cierto día no nazca ningún bebé.
- 9) Entre las 2 y las 4 p.m. el número promedio de llamadas telefónicas que recibe cierta central es de 25. Hallar la probabilidad de que durante un minuto concreto se reciban menos de tres llamadas.
- 10) Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondos por día, ¿Cuál es la probabilidad de que reciba por lo menos cuatro cheques sin fondos en una semana determinada?. Considerar 5 días trabajados a la semana.
- 11) En un supermercado seis clientes pagaron el lunes con tarjeta de débito; cinco pagaron el martes con tarjeta de débito; trece el miércoles; ocho el jueves; tres clientes pagaron el viernes con tarjeta de débito; diez el sábado y once el domingo. ¿Cuál es la probabilidad de que la semana entrante por lo menos cinco clientes paguen con tarjeta de débito?

EJERCICIO 8.6

PRUEBA GENERAL DE PROBABILIDAD

- 1) En un sanatorio de maternidad nacen cierto mes 18 bebés niñas y 15 bebés niños, de los cuales 16 niñas y 12 niños nacen completamente sanos; además, algunos nacen al término de los 9 meses y los hay que nacen prematuramente a los ocho o a los siete meses. Para identificarlos de esas tres características se les pone uno o dos brazaletes de la siguiente forma:
 - 1.- Si es niña se le pone brazaletes rojo; si es niño se le pone brazaletes azul.
 - 2.- Si nace completamente sano el brazaletes se le coloca en su muñeca derecha, de lo contrario en su muñeca izquierda.
 - 3.- Si nace al término de los 9 meses se les pone otro brazaletes como el que ya tiene en la misma mano (o sea, va a tener dos brazaletes en la misma muñeca); si nace prematuramente a los siete u ocho meses se le pone otro brazaletes como el que ya tiene pero en la otra mano (o sea, va a tener un brazaletes en cada muñeca).

El registro de ese mes que se tiene en el sanatorio es el siguiente:

	SANOS		NO SANOS		TOTAL
	9 MESES	PREMATUROS	9 MESES	PREMATUROS	
NIÑAS	14	2	1	1	18
NIÑOS	11	1	3	0	15
TOTAL	25	3	4	1	33

Si se selecciona un bebé al azar, encontrar la probabilidad de que tenga los dos brazaletes en la misma muñeca?

- 2) En cierta región se tiene registrado que llueve en promedio 4 meses al año. ¿Cuál es la probabilidad de que al siguiente año llueva durante 5 meses?
- 3) En una generación de la Facultad de Arquitectura egresaron cierto año 42 alumnos, de los cuales 24 fueron mujeres y 18 hombres. Si se seleccionan 12 de los egresados al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 5 sean varones?

- 4) En un cajón hay 10 objetos nuevos en total, de los cuales 4 son grandes. Además hay 3 objetos viejos que también son grandes. Y hay otros objetos chicos que son 13 en total. Si se saca del cajón uno de los objetos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chico si es de los objetos nuevos?
- 5) En el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que el objeto seleccionado sea viejo o chico?
- 6) Se toman 5 fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que tomen dos o tres mulas?

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

LUIS CASTRO PÉREZ
www.luiscastrop.com

8.9 DISTRIBUCIÓN NORMAL

Cuando se trata de una **variable continua**, o sea que los valores de una muestra puede tomar cualquier valor de la recta numérica, no solamente enteros, si la curva correspondiente a los datos toma la forma como la mostrada en la figura 8.12, se llama **curva normal**.

Una curva normal es simétrica respecto de la media, que es el punto más elevado de la curva y, por lo tanto, el área bajo la curva hacia la izquierda de la media es del 50% y el otro 50% se localiza a la derecha. Ver figura 8.13.

Una característica muy importante de la curva normal es que a partir de su eje de simetría, que es la media de los datos, se puede dividir como lo muestra la figura 8.14, de tal manera que el valor igual a cero de la gráfica corresponda siempre a la media aritmética de la distribución normal de datos, y luego los datos nominales se pueden transformar a una escala cuyos valores van de -3 a $+3$ de la figura 8.14. Por eso, a los datos comprendidos en la escala de -3 a $+3$ se les llama **dato estándar**.

En esa **escala estandarizada**, el 1 representa una **desviación estándar**, el 2 representa **dos desviaciones estándares**, y así sucesivamente. El signo positivo solamente indica que está a la derecha del cero y el signo negativo significa que está a la izquierda. Con los ejemplos venideros se aclararán esos significados.

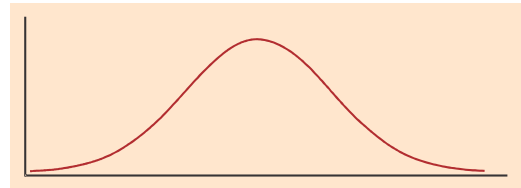


figura 8.12

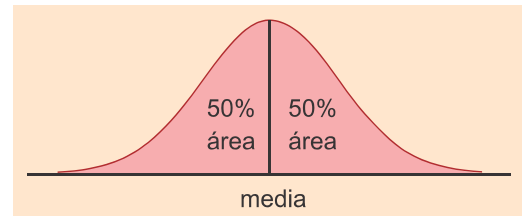


figura 8.13

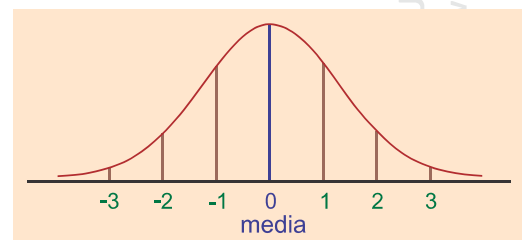


figura 8.14

8.9.1 ESTANDARIZACIÓN DE DATOS

Por lo dicho en el párrafo anterior, los datos pertenecientes a una distribución normal se pueden estandarizar o normalizar, lo cual se consigue utilizando la fórmula

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

en donde:

- z = dato estandarizado o normalizado
- x = valor nominal del dato a estandarizar
- $\bar{x}$ = media aritmética del conjunto de datos
- s = desviación estándar.

Ejemplo 1: Convertir cada uno de los datos nominales de la siguiente tabla a datos estandarizados.

Solución: Para transformar un dato nominal en dato estándar, también llamado *dato z*, se requiere calcular la media de todo el conjunto. Para este caso ya se da por hecho que se sabe calcular la media, por lo que se omiten sus cálculos, la que es $\bar{x} = 12$. Debe calcularse también la desviación estándar, para lo cual a la tabla original hay que agregarle las columnas que se muestran en la siguiente tabla:

x	f	fx	x^2	fx^2
6	1	6	36	36
7	2	14	49	98
8	3	24	64	192
9	5	45	81	405
10	9	90	100	900
11	15	165	121	1815
12	18	216	144	2592
13	15	195	169	2535
14	9	126	196	1764
15	5	75	225	1125

x	f	fx	x^2	fx^2
16	3	48	256	768
17	2	34	289	578
18	1	18	324	324
88		1056	13 132	

Entonces, utilizando la fórmula

$$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{n}}{n - 1}}$$

$$s = \sqrt{\frac{13132 - \frac{1056^2}{88}}{88 - 1}}$$

$$s = 2.2994$$

Se tienen ya todos los datos para utilizar la fórmula del dato z : $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.

<i>dato nominal x</i>	<i>sustituyendo</i>	<i>dato z</i>
6	$z = \frac{6 - 12}{2.2994}$	$z = - 2.6093$
7	$z = \frac{7 - 12}{2.2994}$	$z = - 2.1744$
8	$z = \frac{8 - 12}{2.2994}$	$z = - 1.7395$
9	$z = \frac{9 - 12}{2.2994}$	$z = - 1.3046$

<i>dato nominal x</i>	<i>sustituyendo</i>	<i>dato z</i>
10	$z = \frac{10 - 12}{2.2994}$	$z = - 0.8697$
11	$z = \frac{11 - 12}{2.2994}$	$z = - 0.4348$
12	$z = \frac{12 - 12}{2.2994}$	0
13	$z = \frac{13 - 12}{2.2994}$	$z = 0.4348$
14	$z = \frac{14 - 12}{2.2994}$	$z = 0.8697$
15	$z = \frac{15 - 12}{2.2994}$	$z = 1.3046$
16	$z = \frac{16 - 12}{2.2994}$	$z = 1.7395$
17	$z = \frac{17 - 12}{2.2994}$	$z = 2.1744$
18	$z = \frac{18 - 12}{2.2994}$	$z = 2.6093$

A partir de que la media aritmética del conjunto es $\bar{x} = 12$ y la desviación estándar es $s = 2.2994$, el significado es el siguiente: Un valor estandarizado $z = 1$ significa una distancia a partir de la media aritmética igual a una desviación estándar a la derecha, es decir una distancia de 2.2994. Un valor estandarizado $z = -2$ significa una distancia a partir de la media aritmética igual a dos desviaciones estándar a la izquierda, es decir, una distancia de 4.5988.

Ahora bien, si al dato nominal $x = 6$ le corresponde un dato estándar $z = -2.609$, significa que ese dato 6 se alejó de la media 2.609 desviaciones estándares a la izquierda. Y así con cada uno de los datos nominales.

Gráficamente se muestra en la figura 8.15 de la siguiente página:

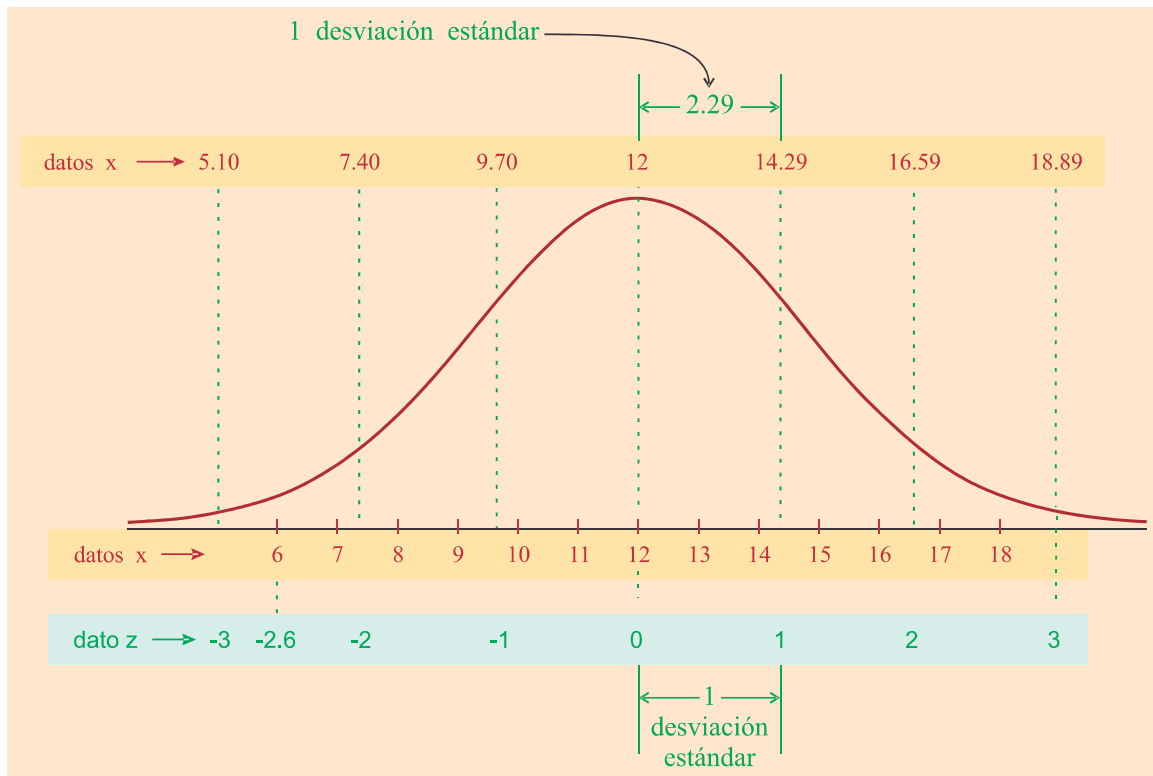


figura 8.15

8.9.2 ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL

En una curva normal, el área bajo la curva desde el extremo izquierdo hasta la media, es decir, hasta el eje de simetría, es del 50% y, obviamente, el otro 50% está en la parte derecha.

Una característica importante de la curva normal y de los datos normalizados es que el área bajo la curva desde la media hasta una desviación estándar, es decir desde $z = 0$ hasta $z = 1$, ya sea a la izquierda o a la derecha, siempre es del 34.13% respecto del área total que puede haber bajo la curva. Ver figura 8.16.

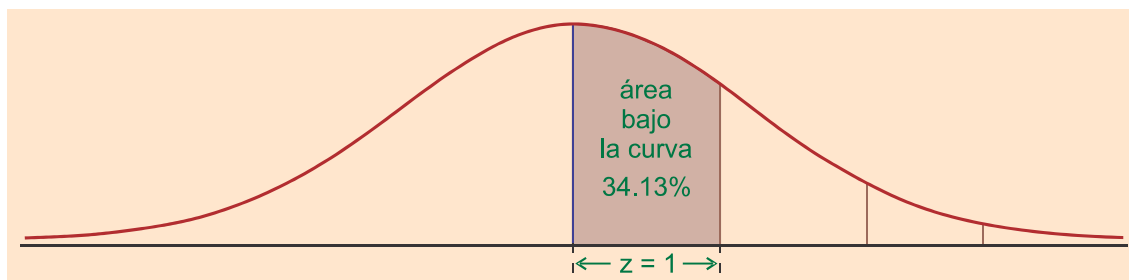


figura 8.16

De la misma forma, el área bajo la curva desde la media hasta dos desviaciones estándar, es decir desde $z = 0$ hasta $z = 2$, ya sea a la izquierda o a la derecha, es del 47.72%. Ver la figura 8.17.

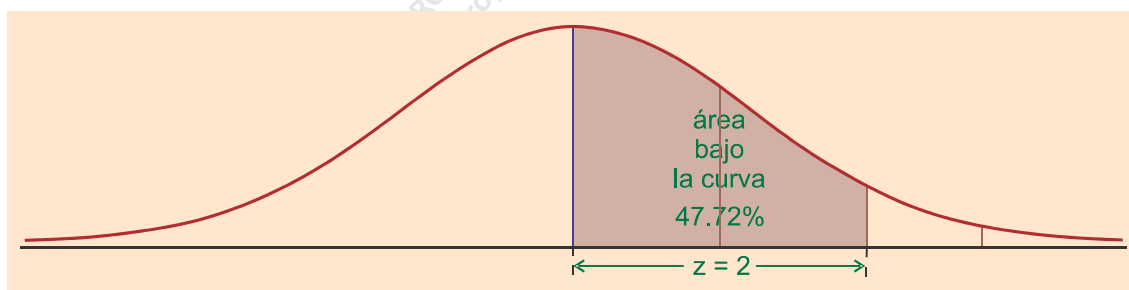


figura 8.17

Todos los demás valores intermedios, por ejemplo para $z = 0.34$ se han concentrado en una tabla que contiene los porcentajes de áreas bajo la curva para cada valor de z expresado con dos decimales. La parte entera va de $-3 < x < +3$.

Para encontrar en la tabla el porcentaje de área bajo la curva para el ejemplo anterior, o sea para $z = 0.34$, se busca en la columna de la izquierda encabezada por z el valor 0.3; y el 4 que falta para completar 0.34 se busca en la primera fila (la de arriba) que son encabezados del 0 al 9. La intersección del 0.3 con el 4 es el porcentaje de área bajo la curva para $z = 0.34$, que le corresponde 13.31.

A continuación se muestra un pedazo de la tabla para ilustrar la forma de localizar los porcentajes de área, en este caso para el del ejemplo del párrafo anterior correspondiente a $z = 0.34$.

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.4	0.8	1.2	1.6	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.54
0.2	7.93	8.32	8.71	9.1	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.8	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.5	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.9	22.24

La tabla completa aparece al final de este tema.

Por lo tanto, es posible obtener el porcentaje de área bajo la curva entre la media y cualquier valor estandarizado z , lo cual se ha concentrado en una tabla. Es muy importante tomar en cuenta que los valores mostrados en la tabla son siempre desde la media hasta el valor estandarizado z .

Otro aspecto que debe considerarse es que cuando el dato estandarizado resulta negativo, en la tabla se busca solamente el valor absoluto, o sea como si no tuviera el signo negativo.

Ejemplo 1: Hallar el porcentaje de área bajo la curva normal que hay entre la media y el dato estandarizado $z = 0.21$.

Solución: La media en dato estandarizado siempre es $z = 0$. Buscando en la tabla (al final de este tema) la intersección de 0.2 de la columna izquierda con 1 (uno) del encabezado de la fila superior que completa el 0.21, se encuentra el valor de 8.32%. Éste es el porcentaje de área bajo la curva normal desde la media hasta el dato estandarizado $z = 0.21$.

La representación gráfica es la figura 8.18 que no está a escala, pues el dato $z = 0.21$ realmente está muy pegado a la media y no permitiría colocar los datos que se introdujeron en esa franja de área.

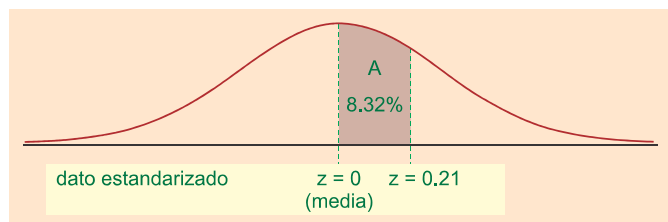


figura 8.18

Ejemplo 2: Hallar el porcentaje de área bajo la curva normal que hay entre la media y el dato estandarizado $z = -0.21$.

Solución: El porcentaje de área es el mismo que en el problema anterior y se busca exactamente igual en la tabla que está al final de este tema. La única diferencia es que el signo negativo indica que dicha área está hacia la izquierda de la media. Buscando en las tablas la intersección de 0.2 de la columna izquierda con 1 (uno) del encabezado de la fila superior que completa el 0.21, se encuentra el valor de 8.32%. Éste es el porcentaje de área bajo la curva normal desde la media hasta el dato estandarizado $z = -0.21$.

Ejemplo 3: En una distribución de tipo normal, se calculó que la media es $\bar{x} = 23.5$ y la desviación estándar $s = 3.25$. Hallar el porcentaje de área bajo la curva entre la media y el dato $x = 31.8$.

Solución: Cuando los datos están dados en valor nominal deben estandarizarse primero. Así que estandarizando el valor de x conforme a la fórmula

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z = \frac{31.8 - 23.5}{3.25}$$

$$z = 2.55$$

Buscando en la tabla al final de este tema el porcentaje de área que corresponde a $z = 2.55$ se encuentra que es 49.46%. Ver figura 8.19.

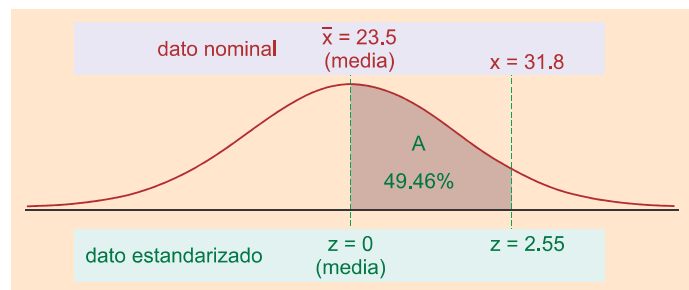


figura 8.19

Ejemplo 4: En una distribución normal se tiene una desviación estándar $s = 5.3$ y una media $\bar{x} = 46.12$. Hallar el porcentaje de área bajo la curva desde la media hasta el dato $x = 42.8$.

Solución: Cuando los datos están dados en valor nominal deben estandarizarse primero. Así que estandarizando el valor de x conforme a la fórmula

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z = \frac{42.8 - 46.12}{5.3}$$

$$z = -0.62$$

Buscando en la tabla el porcentaje de área que corresponde a $z = -0.62$ se localiza solamente 0.6 en la columna de la izquierda y el 2 en la primera fila superior, sin tomar de momento en cuenta el signo. Se encuentra que es 23.24%.

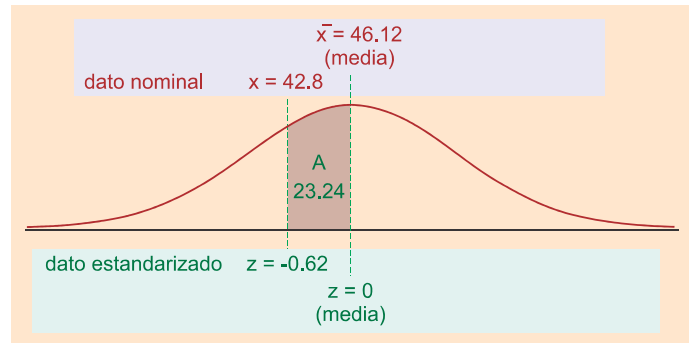


figura 8.20

El signo negativo sirve para indicar que el área se encuentra a la izquierda de la media. Esto, aunque de momento parezca sin importancia, más adelante se verá que es indispensable para obtener ciertas áreas.

EJERCICIO 8.7

Hallar el porcentaje de área bajo la curva normal que hay desde la media hasta el dato nominal que en cada ejercicio se menciona y mencionar si está a la derecha o izquierda de la media.

- 1) Hasta el dato nominal $x = 84$, si la media es $\bar{x} = 78$ y la desviación estándar $s = 5$.
- 2) Hasta el dato nominal $x = 122$, si la media es $\bar{x} = 113$ y la desviación estándar $s = 7.5$.
- 3) Hasta el dato nominal $x = 14.6$, si la media es $\bar{x} = 11$ y la desviación estándar $s = 1.5$.
- 4) Hasta el dato nominal $x = 194.22$, si la media es $\bar{x} = 203$ y la desviación estándar $s = 6.65$.
- 5) Hasta el dato nominal $x = 250.84$, si la media es $\bar{x} = 255$ y la desviación estándar $s = 4.89$.
- 6) Hasta el dato nominal $x = 46.14$, si la media es $\bar{x} = 52.39$ y la desviación estándar $s = 2.85$.

8.9.3 PORCENTAJE ENTRE DOS DATOS NOMINALES

Otra problema que puede presentarse es cómo obtener el porcentaje de área bajo la curva ya no a partir de la media, sino entre dos datos nominales.

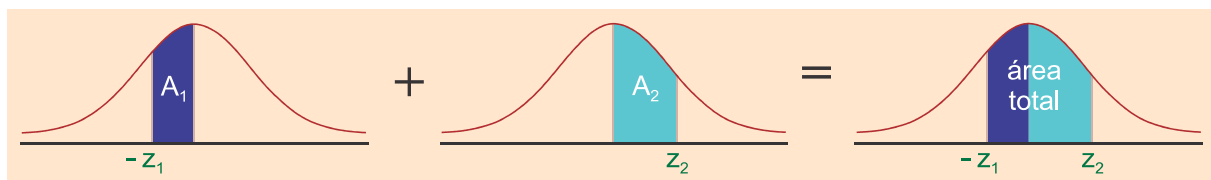


figura 8.21

Hay dos opciones: La primera es que los datos estandarizados z_1 y z_2 se localicen uno a la izquierda y el otro a la derecha de la media. La solución es igual a la suma del área 1 más el área 2, como se ve en la figura 8.21

Otra opción que puede presentarse es la que se muestra en la figura 8.22, consistente en que ambos valores estandarizados z_1 y z_2 se encuentren del mismo lado respecto de la media, en la que también por una lógica muy elemental puede deducirse que el área total es la resta del área 1 menos el área 2.

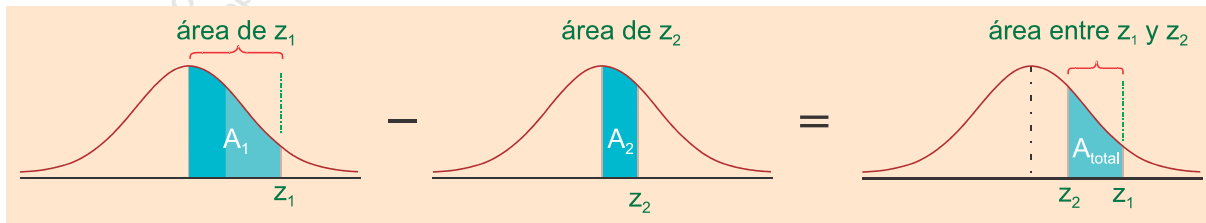


figura 8.22

Ejemplo 5: De un conjunto de datos con una distribución normal, se obtuvo una media de $\bar{x} = 33.2$ y una desviación estándar $s = 9.4$. Calcular el porcentaje de área bajo la curva que hay entre el dato nominal $x_1 = 14$ y el dato nominal $x_2 = 45$.

Solución: Estandarizando ambos datos nominales y localizando en la tabla el porcentaje de área bajo la curva desde la media que a cada uno le corresponde se obtiene que

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z_1 = \frac{14 - 33.2}{9.4} = -2.04$$

$$A_1 = 47.93\%$$

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z_2 = \frac{45 - 33.2}{9.4} = 1.25$$

$$A_2 = 39.44\%$$

Como z_1 es *negativo* significa que su región o porcentaje de área está a la izquierda de la media y como z_2 es *positivo*, su porcentaje de área está a la derecha de la media. Por lo tanto, el porcentaje total de área bajo la curva es la suma de ambas, como se muestra en la figura 8.23:

La suma de los porcentajes de áreas es el porcentaje total de área buscado:

$$A = 47.93\% + 39.44\%$$

$$A = 87.37\%$$

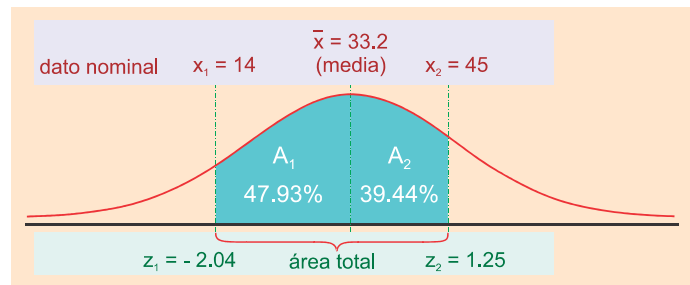


figura 8.23

Ejemplo 6: De un conjunto de datos con una distribución normal, se obtuvo una media de $\bar{x} = 43.2$ y una desviación estándar $s = 8.9$. Calcular el porcentaje de área bajo la curva que hay entre el dato nominal $x_1 = 53$ y el dato nominal $x_2 = 68$.

Solución: Estandarizando ambos datos nominales y localizando en la tabla el porcentaje de área bajo la curva que a cada uno le corresponde se obtiene que

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z_1 = \frac{53 - 43.2}{8.9} = 1.10$$

$$A_1 = 36.43\%$$

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z_2 = \frac{68 - 43.2}{8.9} = 2.78$$

$$A_2 = 49.73\%$$

El porcentaje total de área bajo la curva es la resta de ambas (ver la figura 8.24):

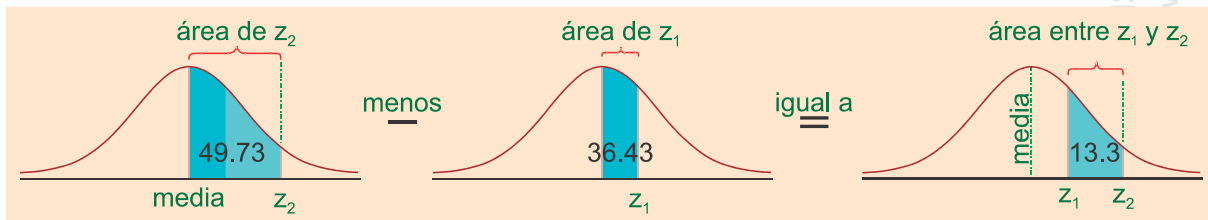


figura 8.24

$$A = 49.73\% - 36.43\%$$

$$A = 13.3\%$$

Ejemplo 7: De un conjunto de datos con una distribución normal, se obtuvo una media de $\bar{x} = 20.4$ y una desviación estándar $s = 8.9$. Calcular el porcentaje de área bajo la curva que hay entre el dato nominal $x_1 = 5$ y el dato nominal $x_2 = 25$.

Solución: Estandarizando ambos datos nominales y localizando en la tabla el porcentaje de área bajo la curva que a cada uno le corresponde se obtiene que

$$z_1 = \frac{5 - 20.4}{2.5}$$

$$z_1 = -6.16$$

$$A_1 = 50\%$$

$$z_2 = \frac{25 - 20.4}{2.5}$$

$$z_2 = 1.84$$

$$A_2 = 46.71\%$$

En este caso el porcentaje de área bajo la curva para $z_1 = -6.16$ es del 50% porque conforme a la tabla, a partir de $z = 3.99$ ya está abarcada toda la mitad, o sea ya le corresponde el 50% de área bajo la curva. Significa que de $z = 3.99$ en adelante está considerada ya toda la mitad de la curva. En casos como el de este ejemplo debe interpretarse que el dato nominal $x_1 = 5$ no existe, lo que no impide que se proponga en el enunciado.

Es el equivalente a que se preguntara: ¿cuántos alumnos de la preparatoria tienen menos de 185 años de edad? Una cosa es que nadie tenga 185 años, ni 184, etc. y otra cosa es que todos los alumnos de la preparatoria tengan menos de 185 años de edad. Si alguno tiene 17 años, tiene menos de 185. El 100% de los estudiantes están por debajo de 185 años, aunque no existe el dato de 1 persona con 185 años.

Entonces el porcentaje total de área bajo la curva es la suma de ambas por estar a ambos lados de la media, como se muestra en la figura 8.25:

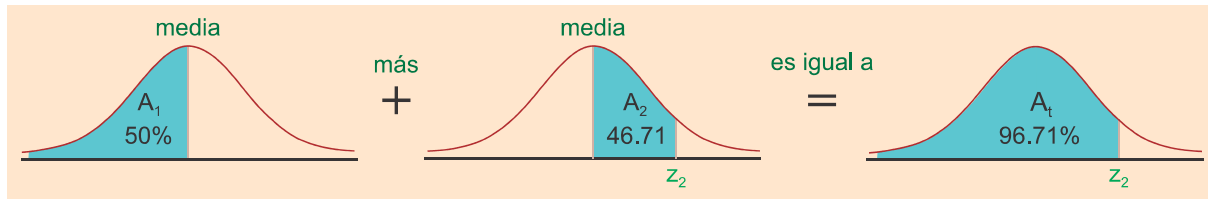


figura 8.25

Ejemplo 8: De un conjunto de datos con una distribución normal, se obtuvo una media de $\bar{x} = 33$ y una desviación estándar $s = 4.5$. Calcular el porcentaje de área bajo la curva que hay entre el dato nominal $x = 38$ y el dato nominal más grande.

Solución: Al dato nominal más grande le corresponde $A_1 = 50\%$ de área bajo la curva a partir de la media en virtud de que está hasta el extremo de la curva.

Estandarizando el dato nominal $x = 38$:

$$z_2 = \frac{38 - 33}{4.5} = 1.11$$

que le corresponde un porcentaje de área desde la media de $A_2 = 36.65\%$. Por lo tanto, el porcentaje de área pedido es la resta:

$$A = A_1 - A_2$$

$$A = 50\% - 36.65\%$$

$$A = 13.35\%$$

La figura 8.26 muestra la lógica de las operaciones anteriores:

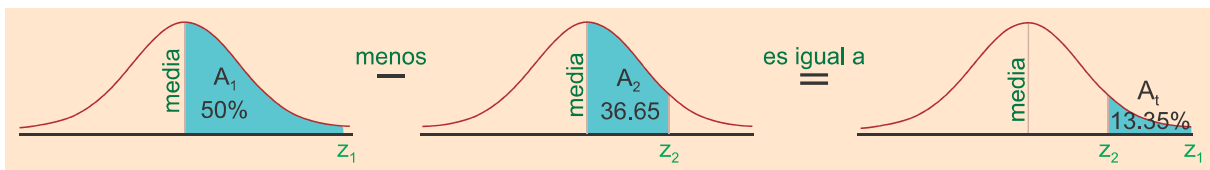


figura 8.26

Ejemplo 9: En una distribución normal con una media $\bar{x} = 70$ y desviación estándar $s = 4$ se tiene un área bajo la curva de $A = 12.20\%$ desde el dato nominal $x_1 = 72.52$ hasta otro dato nominal x_2 . Hallar el valor aproximado de ese otro dato nominal x_2 .

Solución: La figura 8.27 muestra que en realidad hay dos posibles valores que sean la solución a este problema, pues el área bajo la curva dada de $A = 12.20$ puede estar a la derecha o a la izquierda del valor nominal $x_1 = 72.52$.

Estandarizando el dato $x_1 = 72.52$:

$$z_1 = \frac{72.52 - 70}{4}$$

$$z_1 = 0.63$$

Conforme a las tablas, a este dato estandarizado le corresponde un porcentaje de área bajo la curva normal de $A_1 = 23.57$.

Opción 1: Cuando está a la derecha como en la gráfica superior de la figura 8.27 hay que sumarle el área que menciona el enunciado:

$$A_2 = 23.57 + 12.2$$

$$A_2 = 35.77$$

Para esa área en las tablas se localiza que le corresponde un dato estandarizado $z_2 = 1.07$. Entonces de la fórmula de estandarización de datos se despeja el valor x nominal:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$x = zs + \bar{x}$$

$$x = 1.07(4) + 70$$

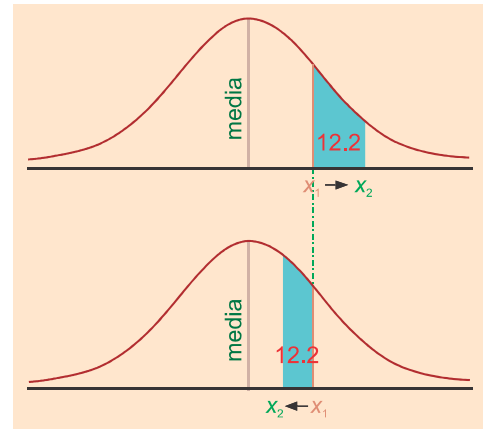


figura 8.27

$$x_2 = 74.28$$

Opción 2: Cuando está a la izquierda como en la gráfica inferior de la figura 8.27 hay que restarle el área que menciona el enunciado:

$$A'_2 = 23.57 - 12.2$$

$$A'_2 = 11.37$$

Para esa área en las tablas se localiza que le corresponde un dato estandarizado $z'_2 = 0.29$. Entonces de la fórmula de estandarización de datos se despeja el valor x nominal:

$$x = zs + \bar{x}$$

$$x = 0.29(4) + 70$$

$$x'_2 = 71.16$$

EJERCICIO 8.8

Hallar el porcentaje de área bajo la curva normal que se pide en los siguientes problemas:

- 1) Si la media es $\bar{x} = 50$ y la desviación estándar $s = 17.4$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 34$ y el dato nominal $x_2 = 62$.
- 2) Si la media es $\bar{x} = 400$ y la desviación estándar $s = 14$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 387$ y el dato nominal $x_2 = 430$.
- 3) Si la media es $\bar{x} = 225$ y la desviación estándar $s = 12$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 203$ y el dato nominal $x_2 = 221$.
- 4) Si la media es $\bar{x} = 120$ y la desviación estándar $s = 16$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 128$ y el dato nominal $x_2 = 160$.
- 5) Si la media es $\bar{x} = 220.1$ y la desviación estándar $s = 15$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 229$ y el dato nominal $x_2 = 296.6$.
- 6) Si la media es $\bar{x} = 99$ y la desviación estándar $s = 5.42$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 71.9$ y el dato nominal $x_2 = 96$.
- 7) Si la media es $\bar{x} = 809$ y la desviación estándar $s = 21.8$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 787.2$ y el dato nominal $x_2 = 809$.
- 8) Si la media es $\bar{x} = 120$ y la desviación estándar $s = 19$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 120$ y el dato nominal $x_2 = 253$.
- 9) Si la media es $\bar{x} = 252$ y la desviación estándar $s = 31.9$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 41.2$ y el dato nominal $x_2 = 475$.
- 10) Si la media es $\bar{x} = 109.6$ y la desviación estándar $s = 10.2$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 125$ y el dato nominal $x_2 = 154$.
- 11) Si la media es de $\bar{x} = 33$ y la desviación estándar $s = 8.5$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 25$ y el dato nominal más grande.

- 12) Si la media es $\bar{x} = 33$ y la desviación estándar $s = 8.5$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 25$ y el dato nominal más chico.
- 13) Si la media es $\bar{x} = 55.5$ y la desviación estándar $s = 2.5$, calcular el área que hay entre el dato nominal $x_1 = 25$ y el dato nominal $x_2 = 80$.
- 14) El área bajo la curva desde el dato nominal $x_1 = 10$ hasta otro dato nominal x_2 es del 40.15% dentro de un conjunto de datos con una distribución normal cuya media es de $\bar{x} = 39$ y su desviación estándar de $s = 14.5$. Calcular el valor del dato nominal x_2 .
- 15) El área bajo la curva desde el dato nominal $x_1 = 10$ hasta otro dato nominal x_2 es del 80.15% dentro de un conjunto de datos con una distribución normal cuya media es de $\bar{x} = 39$ y su desviación estándar de $s = 14.5$. Calcular el valor del dato nominal x_2 .
- 16) El área bajo la curva desde el dato nominal más pequeño hasta otro dato nominal x_2 es del 33% dentro de un conjunto de datos con una distribución normal cuya media es de $\bar{x} = 39$ y su desviación estándar de $s = 14.5$. Calcular el valor del dato nominal x_2 .
- 17) El área bajo la curva desde el dato nominal más pequeño hasta otro dato nominal x_2 es del 93.7% dentro de un conjunto de datos con una distribución normal cuya media es de $\bar{x} = 39$ y su desviación estándar de $s = 14.5$. Calcular el valor del dato nominal x_2 .

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.4	0.8	1.2	1.6	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.54
0.2	7.93	8.32	8.71	9.1	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.8	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.5	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.9	22.24
0.6	22.58	22.91	23.24	23.57	23.89	24.22	24.54	24.86	25.18	25.49
0.7	25.8	26.12	26.42	26.73	27.04	27.34	27.64	27.94	28.23	28.52
0.8	28.81	29.1	29.39	29.67	29.96	30.23	30.51	30.78	31.06	31.33
0.9	31.59	31.86	32.12	32.38	32.64	32.89	33.15	33.4	33.65	33.89
1	34.13	34.38	34.61	34.85	35.08	35.31	35.54	35.77	35.99	36.21
1.1	36.43	36.65	36.86	37.08	37.29	37.49	37.7	37.9	38.1	38.3
1.2	38.49	38.69	38.88	39.07	39.25	39.44	39.62	39.8	39.97	40.15
1.3	40.32	40.49	40.66	40.82	40.99	41.15	41.31	41.47	41.62	41.77
1.4	41.92	42.07	42.22	42.36	42.51	42.65	42.79	42.92	43.06	43.19
1.5	43.32	43.45	43.57	43.7	43.82	43.94	44.06	44.18	44.29	44.41
1.6	44.52	44.63	44.74	44.84	44.95	45.05	45.15	45.25	45.35	45.45
1.7	45.54	45.64	45.73	45.82	45.91	45.99	46.08	46.16	46.25	46.33
1.8	46.41	46.49	46.56	46.64	46.71	46.78	46.86	46.93	46.99	47.06
1.9	47.13	47.19	47.26	47.32	47.38	47.44	47.5	47.56	47.61	47.67
2	47.72	47.78	47.83	47.88	47.93	47.98	48.03	48.08	48.12	48.17
2.1	48.21	48.26	48.3	48.34	48.38	48.42	48.46	48.5	48.54	48.57
2.2	48.61	48.64	48.68	48.71	48.75	48.78	48.81	48.84	48.87	48.9
2.3	48.93	48.96	48.98	49.01	49.04	49.06	49.09	49.11	49.13	49.16
2.4	49.18	49.2	49.22	49.25	49.27	49.29	49.31	49.32	49.34	49.36
2.5	49.38	49.4	49.41	49.43	49.45	49.46	49.48	49.49	49.51	49.52
2.6	49.53	49.55	49.56	49.57	49.59	49.6	49.61	49.62	49.63	49.64
2.7	49.65	49.66	49.67	49.68	49.69	49.7	49.71	49.72	49.73	49.74
2.8	49.74	49.75	49.76	49.77	49.77	49.78	49.79	49.79	49.8	49.81
2.9	49.81	49.82	49.82	49.83	49.84	49.84	49.85	49.85	49.86	49.86
3	49.87	49.87	49.87	49.88	49.88	49.89	49.89	49.89	49.9	49.9
3.1	49.9	49.91	49.91	49.91	49.92	49.92	49.92	49.92	49.93	49.93
3.2	49.93	49.93	49.94	49.94	49.94	49.94	49.94	49.95	49.95	49.95
3.3	49.95	49.95	49.95	49.96	49.96	49.96	49.96	49.96	49.96	49.97
3.4	49.97	49.97	49.97	49.97	49.97	49.97	49.97	49.97	49.97	49.98
3.5	49.98	49.98	49.98	49.98	49.98	49.98	49.98	49.98	49.98	49.98
3.6	49.98	49.98	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99
3.7	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99
3.8	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99	49.99
3.9	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50